# Vermessung der Linienbreite eines Interferenzfilter-Diodenlasers mithilfe der Heterodyn-Methode

# Bachelorarbeit in Physik

Juli 2013

Angefertigt am Institut für angewandte Physik (IAP)

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

> Name: Martin Link Matrikelnummer: 2327721 Studiengang: Physik Studienjahrgang: 2010

Erstgutachter: Prof. Dr. Dieter Meschede

Zweitgutachter: Dr. Wolfgang Alt

"Der Gelehrte studiert di	e Natur nicht meil	das etwas Nützlich	es ist Er studiert s	ie weil er
daran Freude hat, und er schön wäre, so wäre es ni wert, gelebt zu werden." - Henri Poincaré	hat Freude daran,	weil sie so schön	ist. Wenn die Natur	r nicht so

# Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Diodenlaserquellen2.1 Halbleiterlaser2.2 Diodenlaser mit externem Resonator2.3 Interferenzfilter-Laser2.4 Verwendete Laser	2 2 3 3 4
3	Dopplerfreie Polarisations-Spektroskopie	7
	3.0.1 Dopplerverbreiterung	7 8 8
	3.1.2 Dopplerfreie Polarisations-Spektroskopie	8 9 10
4	Linienbreite und -form von Lasern	11
5	Heterodyn-Messung         5.1 Allgemeines          5.2 Prinzip          5.3 Selbstheterodyn-Methode          5.3.1 Prinzip          5.3.2 Ergebnisse          5.3.3 Fazit und Problematisierung          5.4 Optische Heterodyn-Methode          5.4.1 Prinzip          5.4.2 Auswertung          5.4.3 Fazit und Problematisierung	12 13 13 13 14 15 17 17 18 22
6	Zusammenfassung und generelles Fazit	23
$\mathbf{A}$	Selbstheterodyn-Messung IFL001	29
В	Spektroskopiesignal IFL001	31
$\mathbf{C}$	Auswertungsprogramm	<b>32</b>
D	Bilder der Versuchsaufbauten	36

# 1 Einleitung

Seit seiner Entwicklung wird der Einfluss des Lasers in allen Teilen der Physik und Industrie immer wichtiger. Die Möglichkeit gebündeltes, nahezu monochromatisches Licht hoher Intensität zu erzeugen hat nicht nur in vielen Zweigen der Industrie wie zum Beispiel der Datenträgerentwicklung oder Datenübertragung zu Weiterentwicklungen geführt, sondern die Bedeutung des Lasers kann auch für die moderne Forschung selbst nicht unterschätzt werden. Ein Teilgebiet der Physik, welches sich nicht nur mit der Entwicklung und Vermessung ständig neuer Modelle von Lasern beschäftigt, sondern diese auch zu einem elementaren Bestandteil ihrer Experimente macht, ist die Quantenoptik.

Laser selbst sind in den vergangenen Jahren durch konstante Forschung und Entwicklung immer günstiger und einfacher in der Herstellung geworden. Einen Meilenstein in dieser Entwicklung stellen Diodenlaser dar. Diese kompakten Halbleiterlaser zeichnen sich vor allem durch ihre sehr kompakte Bauweise und ihre verhältnismäßig einfache Bedienung (Pumpen durch elektrischen Strom) aus, die sie für vielerlei Einsatzgebiete begehrenswert macht. Diodenlaser eignen sich in ihrer Ursprungsform aufgrund von Linienbreiten im Megahertz-Bereich allerdings nur bedingt für die Verwendung in hochsensitiven Experimenten wie zum Beispiel dem Kühlen von Atomen. Damit Diodenlaser dennoch im Labor verwendet werden können, wird eine externe optische Rückkopplung bestimmter Wellenlängen durchgeführt. Man spricht in diesem Falle von einem Diodenlaser mit externem Resonator (kurz: ECDL¹). Durch die starke Verengung der Linienbreite und die diodenbedingte gute Verstellbarkeit dieser Aufbauten wird der Einsatz für die Spektroskopie wie im Falle dieser Arbeit oder für das Kühlen von Atomen wieder sinnvoll.

Diese Arbeit beschäftigt sich insbesondere mit der Vermessung der Linienbreite einer solchen Diodenlaserkonfiguration mit externem Resonator. Als wellenlängenselektives Element wird dabei auf einen schmalbandigen Interferenzfilter zurückgegriffen, dessen Untersuchung mithilfe eines Selbstheterodyn-Experimentes bereits eine sehr geringe Linienbreite vermuten ließ. Eine genaue Beschreibung des verwendeten Aufbaus und seiner Vor- und Nachteile befindet sich in Kapitel 2. Weiterhin soll der Einfluss eines Rückkopplungskreises mit einem durch dopplerfreie Polarisations-Spektroskopie erzeugten Fehlersignal untersucht werden. Dies geschieht in Kapitel 3. Um eine quantitative Aussage über die resultierende Linienbreite treffen zu können, muss diese vermessen werden. Dabei wird auf die ursprünglich aus der Audiotechnik und Astronomie bekannten heterodyne Messmethode zurückgegriffen, die sich auch im Bereich der Optik etabliert hat. Dazu werden zwei ähnliche Laser zur Schwebung gebracht und das resultierende, niederfrequente Schwebungssignal analysiert. Eine quantitative Beschreibung dieses Verfahrens wird in Kapitel 5 durchgeführt.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Engl.: External Cavity Diode Laser

# 2 Diodenlaserquellen

#### 2.1 Halbleiterlaser

Halbleiterlaser sind die bisher wichtigsten durchstimmbaren Infrarotlaser [Dem11]. Das Prinzip basiert auf der Halbleiterstruktur von Kristallen: Leitet man einen Strom in Durchlassrichtung durch einen pn-Übergang, so können Löcher und Elektronen rekombinieren und die Rekombinationsenergie in Form von elektromagnetischer Dipolstrahlung aussenden. Die charakteristische Größe, die die Frequenz dieser Strahlung bestimmt, ist die Energielücke an der Bandkante des pn-Übergangs. Eine geeignete Wahl der beteiligten Halbleiterkristalle und deren Dotierung lässt deshalb eine verhältnismäßig genaue Wahl der Frequenz  $\nu$  der emittierten Strahlung zu. Genauer gilt:

$$\frac{E_g}{h} < \nu < (F_n - F_p)/h. \tag{1}$$

Hierbei ist  $E_g$  die Energielücke zwischen Leitungs- und Valenzband,  $F_n$  und  $F_p$  entsprechen den Quasi-Fermi Niveaus der n- beziehungsweise p-dotierten Schicht.

Die Linienbreite der spontanen Emission durch Rekombination beträgt dabei einige THz [Kne08].

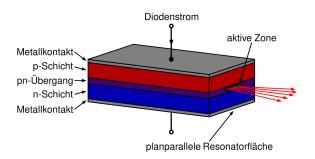


Abbildung 1: Skizze einer Laserdiode [Sem13].

Der Laserresonator selbst besteht aus zwei planparallelen Flächen, in deren Mitte sich die sogenannte aktive Zone befindet, in welcher die Rekombination stattfindet. Die Grenzflächen der Halbleiterkristalle selbst bilden dabei einen Fabry-Perot-Resonator, dessen Rückkopplung das Strahlungsfeld in der Rekombinationszone so stark verstärkt, dass die Rekombination hauptsächlich durch induzierte Emission geschieht [Dem11].

Eine Veränderung des in Gleichung (1) beschriebenen Frequenzbereiches lässt sich durch Veränderung aller Parameter erreichen, die den Energieabstand der Laserniveaus ändern. Relevante Beispiele dafür sind Veränderungen des angelegten Stroms oder der Temperatur. Ein weiteres Beispiel ist das Anlegen einer mechanischen Spannung oder eines äußeren Magnetfeldes.

Da sich bei der Variation von Temperatur und Strom sowohl die Resonatorfrequenz als auch die Strahlungscharakteristik der Diode ändern, treten bei kontinuierlicher Verstimmung diskontinuierlich Sprünge in der emittierten Frequenz auf. Dies liegt daran, dass das Maximum der Verstärkungsfrequenz sich wesentlich stärker verschiebt als die Resonatorfrequenz. Es kann

es daher passieren, dass sich die verstärkte Resonatormode verändert. Man spricht dann von einem Modensprung. Durch die Modensprünge bedingt können sogar dunkle Zonen auftreten, in denen Resonator und Verstärkungsprofil so asynchron stehen, dass es nur zu sehr geringer Emission kommt [Mes08]. Um diese Sprünge zu unterdrücken, damit eine kontinuierliche Durchstimmung möglich ist, ist es deshalb sinnvoll einen externen, variablen Resonator zu nutzen. Man spricht dann von einem Diodenlaser mit externem Resonator (ECDL).

Eine weitere Motivation zur Konstruktion eines solchen externen Resonators besteht darin, das untere Limit der Linienbreite des Lasers entsprechend der Schawlow-Townes-Linienbreite [Enc113]

$$\Delta \nu_{Laser} = \frac{2\pi h \nu (\delta \nu_{Res})^2}{P_{aus}} \tag{2}$$

zu verkleinern. Hierbei entspricht  $\nu$  der Frequenz des Lasers,  $P_{aus}$  der Ausgangsleistung und  $\delta\nu_{Res} \propto \frac{c}{2nL}$  der Bandbreite des verwendeten Resonators. Eine Vergrößerung des Laserresonators führt demnach eine Verringerung des unteren Limits der Linienbreite mit sich.

#### 2.2 Diodenlaser mit externem Resonator

Um eine kontinuierliche Durchstimmung des verwendeten Diodenlasers zu erreichen, ist es nötig die Modensprünge zu unterdrücken. Dies kann man dadurch erreichen, dass man den Resonator 'auslagert' und damit die Resonatorfrequenz variabel hält. Dabei ist es von Vorteil die Diodenflächen zu entspiegeln, um zu große Reflexionsverluste zu vermeiden und um zu verhindern, dass die Grenzflächen einen zweiten unabhängigen Resonator bilden. Durch die Bauart bedingte wachsende Resonatorlänge verringert sich entsprechend dem freien Spektralbereich

$$\delta\nu_{Res} \propto \frac{c}{2nL}$$
 (3)

auch der Abstand der Moden [Mes08]. Um dieser Tatsache Sorge zu tragen und um zu verhindern, dass mehrere Moden gleichzeitig verstärkt werden können, ist es möglich ein wellenlängenselektives Element im Strahlgang zu platzieren.

Verschiedene Realisierungen von ECDL's sind zum Beispiel die Littrow- oder Littman-Metcalf-Konfigurationen, die als wellenlängenselektives Element ein Reflexionsgitter verwenden [Kne08]. Eine weitere Realisierung sieht einen schmalbandigen Interferenzfilter als wellenlängenselektives Element vor. Diese Anordnung soll im folgenden Abschnitt vorgestellt und erläutert werden.

#### 2.3 Interferenzfilter-Laser

Interferenzfilter-Laser sind eine Realisation von Diodenlasern mit externem Resonator, die als wellenlängenselektives Element einen schmalbandigen (Spektrale Breite: 0,4 nm) Interferenzfilter nutzen. Eine Skizze des Aufbaus ist in Abbildung 2 zu sehen.

Das Lasersystem besteht unter anderem aus der Laserdiode selbst und einer Linse L1, die zu einer Kollimation des Strahles innerhalb des Systems führt. Der kollimierte Strahl trifft anschließend auf den Interferenzfilter. Der gefilterte Strahl wird dann durch eine Katzenaugen-Linsenkonstruktion auf einen teildurchlässigen Spiegel (Reflektivität  $R \approx 30\%$ ) fokussiert.

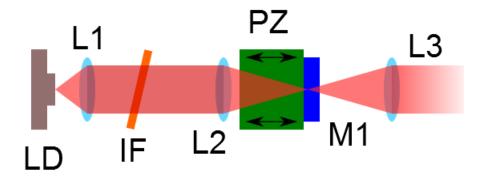


Abbildung 2: Skizze eines Interferenzfilter-Lasers. LD Laserdiode, L Linsen, IF Interferenzfilter, PZ Piezoelektrischer Sensor, M Teilreflektierender Spiegel.

Diese beiden Bauteile bilden zusammen einen Retroreflektor, der für eine Stabilisierung der optischen Rückkopplung sorgt. Um die Länge des Resonators dynamisch verändern zu können, ist der Spiegel weiterhin auf einem röhrenförmigen piezoelektrischen Element angebracht. Durch Anlegung einer Spannung an dieses kann der Spiegel damit entlang der optischen Achse verschoben und die Resonatormoden variiert werden. Der transmittierte Teil des Strahls wird durch eine dritte Linse erneut kollimiert. Diese bildet mit der Katzenaugenlinse ein Teleskop, dass durch geschickte Brennweitenwahl eine Variation der Strahltaille nach eigenen Wünschen zulässt.

Im Gegensatz zu der Littrow- oder Littman-Metcalf-Anordnung [Kne08] besteht der große Vorteil der Interferenzfilter-Anordnung aus der Trennung von Wellenlängenselektion und Rückkopplung. Da diese Parameter dadurch getrennt eingestellt werden, wird eine erhöhte Stabilität gegenüber äußeren Störungen bei ähnlicher Durchstimmbarkeit gewährleistet. Eine genaue Untersuchung der Stabilität, auch im Vergleich mit der Littrowkonfiguration findet sich in [Bai06].

### 2.4 Verwendete Laser

Im Rahmen dieser Bachelorarbeit wurden zwei Interferenzfilter-Laser verwendet (im Folgenden IFL001 und IFL 002 genannt). Die Spezifikationen der Bauteile sind Tabelle 1 zu entnehmen.

Bauteil	IFL001	IFL002
Laserdiode:	852 nm, uncoated JDSU	850 nm, M9-852-0150-S3P, Axcel Photonics
Interferenzfilter:	ATFilms, 93% Transmission, 852 nm	ATFilms, 93% Transmission, 852 nm
Auskoppler Spiegel:	Mountain Photonics, 852 nm, 68.1%	Mountain Photonics, 852 nm, 68.1%
Brennweite Linse 1:	$4.5 \mathrm{\ mm}$	4.5  mm
Brennweite Linse 2:	$18.4 \mathrm{\ mm}$	$18.4 \mathrm{\ mm}$
Brennweite Linse 3:	13.86  mm	13.86  mm
Gehäuse:	Eigenanfertigung	Eigenanfertigung

Tabelle 1: Daten der Interferenzfilter-Laser.

IFL001 war zu Beginn dieser Bachelorarbeit bereits aufgebaut und funktionsfähig. Die Elektronik von IFL002 war ebenfalls bereits vorhanden und die Laserdiode eingebaut. Für IFL002 fand eine Optimierung des Resonators statt um die Laserschwelle möglichst niedrig zu halten.

Anschließend wurde der Interferenzfilter eingebaut und sein Winkel zur optischen Achse so eingestellt, dass die emittierte Wellenlänge nahe der D2 Linie von Caesium (351.72571850(11) THz) liegt, die für die spätere Verwendung zum Kühlen der Atome benötigt wird. Anschließend wurde erneut die Laserschwelle optimiert, da der Interferenzfilter für eine leichte Verschiebung der optischen Achse sorgt. Um den auslaufenden Strahl zu kollimieren wurde zuletzt die Position der Katzenaugenlinse optimiert. Außerhalb des Lasers wurde weiterhin ein Teleskop aus zylindrischen Linsen angebracht, um das aufgrund der Diodenarchitektur elliptische Strahlprofil kreisförmig zu formen. Zuletzt wurde, um Rückkopplung durch rückläufige Strahlen zu verhindern, ein optischer Isolator eingebaut.

Um die Leistung des Lasers zu charakterisieren, wurden weiterhin zwei Messungen an IFL002 durchgeführt. Zum einen wurde die Stromabhängigkeit der Leistung der Laserdiode direkt gemessen, zum anderen die Leistung hinter dem Lasergehäuse. Die Ergebnisse der Messungen sind in den Abbildungen 3 und 4 zu sehen. Der Fehler auf die Leistung wurde dabei anhand des Datenblattes des verwendeten Leistungsmesser auf 6% geschätzt.

Weitere Messungen an IFL001 innerhalb der Arbeitsgruppe und vor dieser Bachelorarbeit (durchgeführt von Carsten Robens) zeigten außerdem eine hohe Verstimmbarkeit durch Veränderung der bereits in Abschnitt 2.1 und 2.3 erwähnten Parameter. Die Ergebnisse der Messungen sind in Tabelle 2) zusammengefasst.

Parameter	Verstimmbarkeit
Temperatur	41,7 GHz
Strom	$40~\mathrm{GHz}$
Interferenzfilter-Winkel	3,33  THz

Tabelle 2: Verstimmbarkeit der Laserfrequenz durch Variation der Parameter Temperatur, Strom und Interferenzfilter-Winkel [Ag13].

	$m \left[ \frac{W}{A} \right]$	b  [mW]
$f_1(x)$	$0,63 \pm 0,02$	$-13, 12 \pm 0, 48$
$f_2(x)$	$0,48 \pm 0,03$	$-6, 4 \pm 1, 9$
$f_3(x)$	$0,22 \pm 0,04$	$22,5 \pm 4,0$
$f_4(x)$	$0,17 \pm 0,05$	$34,0 \pm 5,3$

Tabelle 3: Anpassungsparameter der linearen Funktionen in Abbildung 4.

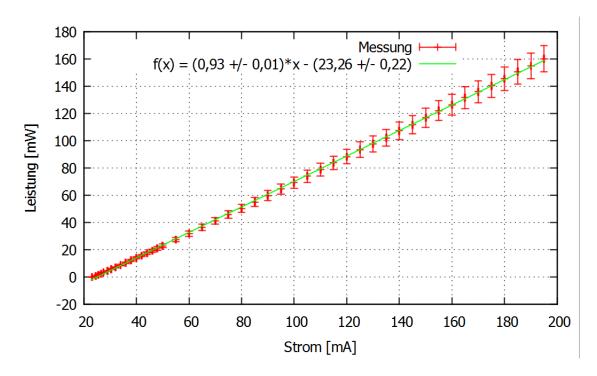


Abbildung 3: Messung der Leistung direkt hinter der Diode in Abhängigkeit vom angelegten Strom.

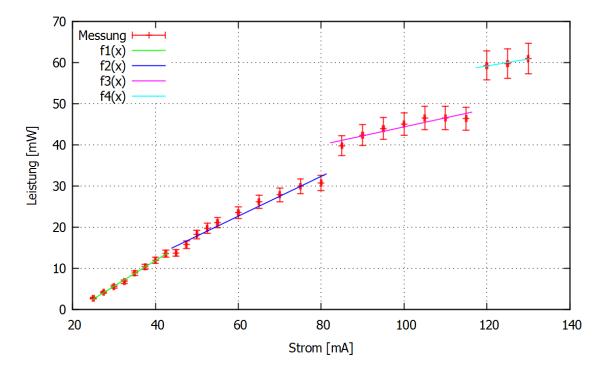


Abbildung 4: Messung der Leistung in Abhängigkeit vom angelegten Strom hinter dem Laser. Angepasst wurden lineare Funktionen der Form  $f_i(x) = m_i x + b_i$ . Die Anpassungsparameter finden sich in Tabelle 3.

# 3 Dopplerfreie Polarisations-Spektroskopie

Die in Abschnitt 2.4 vorgestellten Interferenzfilter-Laser sollen nach Abschluss dieser Bachelorarbeit zur Kühlung von Atomen verwendet werden. Um Atome zu kühlen, ist es nötig atomare Feinstrukturübergänge gezielt zu adressieren. Dies erfordert, dass die Laser sehr stabil laufen, damit die Frequenz des Laserlichts innerhalb der natürlichen Linienbreite eines ausgewählten Feinstrukturübergangs bleibt. In diesem Abschnitt soll zu diesem Zweck die Möglichkeit einer Laserstabilisierung mithilfe eines Rückkopplungskreises untersucht werden. Das zur Rückkoplung benötigte Fehlersignal soll dabei durch dopplerfreie Laser Polarisations-Spektroskopie [Wie76] gewonnen werden.

#### 3.0.1 Dopplerverbreiterung

Um Laser auf atomare Übergänge zwischen Feinstruktur-Niveaus zu stabilisieren, ist es nötig, diese auflösen zu können. Wichtig ist es von daher eine Spektroskopie-Methode zu nutzen, deren Auflösungsvermögen in der Nähe der natürlichen Linienbreiten liegt.

Der relevanteste der Verbreiterungseffekte von Linienbreiten ist die Doppler-Verbreiterung. Diese entsteht durch die Tatsache, dass die molekularen Geschwindigkeiten von Teilchen innerhalb einer gasförmigen Probe der Maxwell-Boltzmann-Verteilung

$$f_D(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k_B T/m}} \exp\left(-\left(\frac{v}{\sqrt{2k_B T/m}}\right)^2\right)$$
(4)

entsprechen. Die emittierte Strahlung bewegter Teilchen ist nach dem Dopplereffekt um

$$\omega_{Labor} = \omega_{Ruhe} + \vec{k}\vec{v} \tag{5}$$

frequenzverschoben. Die Linienform lässt sich dann über das Integral

$$\alpha_D(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dv_z f(v_z) \alpha(w + kv_z)$$
 (6)

berechnen. Hierbei bezeichnet  $v_z$  o.B.d.A die Betrachtungsrichtung und  $\alpha$  die lorentzförmige natürliche Linienbreite. Wertet man dieses Integral in der Näherung langsamer Zerfallsraten eines optischen Übergangs aus, so erhält man eine Gaußverteilung, deren Halbwertsbreite der Dopplerverbreiterung

$$\Delta \nu_d = \frac{\Delta \omega_D}{2\pi} = \frac{\omega_0}{2\pi} \sqrt{\frac{8k_B T \ln 2}{mc^2}} = 7,16 \cdot 10^{-7} \sqrt{\frac{T}{M}} \cdot \nu_{Ruhe}$$
 (7)

entspricht [Mes08, Dem07]. Hierbei entspricht im letzten Term M der atomaren Massenzahl. Für gewöhnliche Temperaturen um 20°C erwartet man Molekulargeschwindigkeiten von  $100 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$  bis  $1000 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ , was Verschiebungen von einigen hundert bis  $1000 \, \mathrm{MHz}$  entspricht. Diese Verschiebungen übertreffen die natürliche Linienbreite um ungefähr zwei Größenordnungen. Es ist deshalb von Nöten eine dopplerfreie Spektroskopiemethode zu wählen.

# 3.1 Dopplerfreie Spektroskopie

#### 3.1.1 Allgemeines Prinzip

Bei der normalen Sättigungsspektroskopie wird die Absorption von Laserlicht in Abhängigkeit der Wellenlänge bei der Transmission durch eine Probe bestimmt. Dabei ist es wichtig, dass die Frequenz des absorbierten Lichtes innerhalb der natürlichen Linienbreite eines Übergangs liegt. Da wie in Abschnitt 3.0.1 erwähnt die Molekülgeschwindigkeit einer Maxwell-Boltzmann-Verteilung folgt, ist die Frequenz, die das Atom in seinem Ruhesystem sieht, davon abhängig, welche Geschwindigkeit das Atom im Laborsystem hat. Die Absorptionsfrequenz unterliegt der Dopplerverbreiterung.

Will man diese Geschwindigkeitsabhängigkeit eliminieren, greift man auf das Prinzip der dopplerfreien Spektroskopie zurück. Hierbei wird wie bei der einfachen Sättigungsspektroskopie ein Laserstrahl (hier: Pumpstrahl) durch eine Probe geschickt. Dieser sättigt die Probe nach dem oben beschriebenen Prinzip. Insbesondere wird Licht mit einer Frequenz  $\omega_L$  etwas unterhalb der Resonanzfrequenz  $\omega_0$  von Atomen einer Geschwindigkeit  $v_z$  absorbiert, für die gilt  $\omega_L = \omega_o - k_z v_z$ .

Richtet man einen gleichartigen gegenläufigen (z.B. gespiegelten) Strahl (hier: Probenstrahl) mit geringer Intensität auf die Probe, so wird für diesen Strahl aufgrund der Gegenläufigkeit des Pumpstrahls Licht der gleichen Frequenz  $\omega_L$  von Atomen absorbiert, die sich mit der Geschwindigkeit  $(-v_z)$  bewegen, sodass  $\omega_L = \omega_0 + k_z v_z$ . Strahlt man nun allerdings Licht mit der Resonanzfrequenz  $\omega_0$  ein, so wechselwirken sowohl Pump- als auch Probenstrahl mit derselben Geschwindigkeitsklasse von Atomen, nämlich den Atomen, für die gilt:  $v_z = 0$ . Der rückläufige Probenstrahl durchläuft das Medium dann mit geringerer Absorption, da sich die meisten Atome, mit denen er wechselwirken kann, schon im angeregten Zustand befinden. Im Absorptionsspektrum erhält man dann eine dopplerfreie Resonanzlinie mit der natürlichen Linienbreite [Dem07, Mes08, Pra08].

#### 3.1.2 Dopplerfreie Polarisations-Spektroskopie

Die dopplerfreie Polarisations-Spektroskopie [Wie76] basiert auf einem ähnlichen Prinzip wie die in Abschnitt 3.1.1 beschriebene dopplerfreie Sättigungs-Spektroskopie, allerdings wird hier nicht eine Änderung der Transmission, sondern eine Veränderung der Polarisationsebene detektiert. Um dies zu bewerkstelligen wird der Probenstrahl linear polarisiert. Hinter der Probe ist dann ein gekreuzter Analysator angebracht, sodass nur bei Drehungen der Polarisationsebene des Probenstrahls ein Signal auf der Photodiode entsteht. Der Aufbau ist in Abbildung 5 skizziert.

Trifft ein zirkular polarisierter Pumpstrahl auf die Probe, induziert dieser optische Übergänge mit  $\Delta M=1$  in der Probe, wobei M die Quantenzahl der Projektion des Gesamtdrehimpulses auf die Richtung des Pumpstrahles ist [Dem07]. Da, ähnlich wie beim Prinzip des optischen Pumpens [Mes08], nicht jeder Übergang mit gleicher Wahrscheinlichkeit angeregt werden kann, ensteht dabei einer Verteilung der Drehimpulsprojektionen abseits vom thermischen Gleichgewicht. Diese räumliche Orientierung der Drehimpulsprojektionen sorgt für Anisotropie, die widerrum zu einer Drehung der Polarisationsebene wie bei optisch aktiven Medien führt. Wichtig ist dabei die Tatsache, dass die Polarisationsebene nur dann gedreht wird, wenn der Probenstrahl mit denen durch den Pumpstrahl angeregten Atomen wechsel-

wirkt. Dies ist, analog zu Abschnitt 3.1.1, nur dann möglich, wenn die Frequenz des Strahles genau innerhalb der natürlichen Linienbreite der Resonanzfrequenz liegt [Wie76].

Eine genauere quantitative Betrachtung findet sich in den Quellen [Dem07, Wie76].

### 3.2 Aufbau

Um ein Fehlersignal zur Stabilisierung des Lasers zu erhalten, wurde für jeden Laser eine dopplerfreie Polarisations-Spektroskopie aufgebaut. Eine Skizze des Aufbaus ist in Abbildung 5 zu sehen.

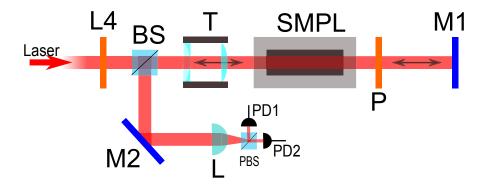


Abbildung 5: Skizze der dopplerfreien Polarisations-Spektroskopie. L4  $\lambda/4$ -Platte, BS Strahlteilerwürfel, SMPL Cäsium-Gas Probe, P Polarisator, M Spiegel, L Linse zur Fokussierung auf die Diode, T Galilei-Fernrohr, PBS polarisierender Strahlteiler-Würfel, PD Photodiode.

Aufgrund des einfachen Aufbaus und des verhältnismäßig geringen Aufwandes wurde ein retroreflektiver Aufbau gewählt. Dabei sind der Polarisations- und Probenstrahl identisch. Eine zirkulare Polarisation des Polarisationsstrahles wird durch eine  $\lambda/4$ -Platte vor der Probe erreicht. Die Probe selbst ist mit einem  $\mu$ -Metallschild umwickelt und entmagnetisiert, um Einflüsse durch äußere Magnetfelder zu unterdrücken. Hinter der Probe wird der Strahl dann durch einen um 45° geneigten Polarisator linear polarisiert, sodass der rückläufige Probenstrahl wie gefordert linear polarisiert ist. Der rückläufige Strahl wird mithilfe eines nicht polarisierenden Strahlteilerwürfels aus dem Strahlengang gelenkt und mit einer Linse auf die Diodenkonstruktion fokussiert. Durch einen polarisierenden Strahlteilerwürfel werden der pund s-polarisierte Teil auf seperate Photodioden gelenkt. Der Strahlteilerwürfel dient hier auch gleichzeitig als Analysator. Die Diodenkonstruktion an sich kann dann die beiden polarisierten Anteile getrennt anzeigen, sowie deren Differenz zur Erzeugung eines dispersiven Signals. Um den Kontrast des Signals zu verbessern, wird der Querschnitt des Pumpstrahles (und damit auch der des Probenstrahles) vor dem Eintritt in die Probe mithilfe eines Galilei-Fernrohrs ungefähr um einen Faktor 3 vergrößert (Brennweiten IFL001: 20 mm, 75 mm; Brennweiten IFL002: 50 mm, 150 mm). Dies dient dazu, die Intensität des Pumpstrahls zu verringern, damit keine Übersättigung im Pumpstrahl stattfindet und damit die Intensität des Probenstrahls ausreichend gering ist. Zu beachten ist, dass der sämtliche Bauteile im realen Aufbau einen leichten Winkel gegenüber der Strahlachse aufweisen. Dies verhindert Interferenzphänomene durch reflektierte Strahlen, die das Spektroskopiesignal zusätzlich negativ beeinflussen können. Aberrationseffekte sind vernachlässigbar.

## 3.3 Stabilisierung

Um den Laser mithilfe der Spektroskopie zu stabilisieren wird pro Laser ein einstellbarer Anteil des Strahles in den Spektroskopiezweig gelenkt. Dies geschieht mithilfe einer  $\lambda/2$ -Platte und eines polarisierenden Strahlteilerwürfels. Durch Drehung der  $\lambda/2$ -Platte kann die Intensität des ausgekoppelten Arms eingestellt werden. Der Rest des Strahls wird durch eine Faserkopplung zum Experiment geleitet.

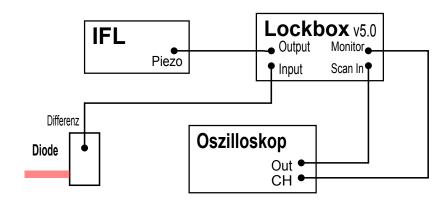


Abbildung 6: Skizze der Stabilisierungsschaltung.

Das dispersive Differenzsignal der Photodiode dient als Fehlersignal im Rückkopplungskreis. Dazu wird das Signal auf einen Stabilisationsverstärker mit Input-Offset-Funktion und verschiedenen Verstärkungseinstellungen (im Englischen Lockbox) mit PI-Regler gegeben. Zur Einstellung der Verstärkungseigenschaften und des Offsets wird ein Oszilloskop benutzt. Hat man sich einen atomaren Übergang ausgesucht, schiebt man die zugehörige Kante im Differenzsignal mithilfe der Input-Offset Einstellung auf 0 und aktiviert den Lock-Schalter an der Lockbox. Verschiebt sich die Frequenz des Lasers nun, so verschiebt sich auch das dispersive Signal und der Verstärker erzeugt eine Spannung. Diese wird mit eingestellter Verstärkung an das piezoelektrische Element des Interferenzfilter-Lasers weitergegeben. Durch die resultierende Veränderung der Resonatorlänge wird die Frequenz wieder in Richtung ihres ursprünglichen Wertes geschoben.

Um die beiden Interferenzfilter-Laser letztendlich zu stabilisieren, war es zuerst nötig ein Fehlersignal zu bekommen. Aus diesem Grund wurden die Laser mithilfe eines Wellenlängenmessers (Coherent WaveMaster) grob (in einem Bereich von  $\pm 5\,\mathrm{GHz}$ ) auf die richtige Frequenz eingestellt. Dies gestaltete sich insbesondere für IFL001 zunehmend schwierig, da es über eine weite Spanne von Temperatur- und Stromeinstellungen nicht möglich war, den Laser stabil auf einer Mode zu betreiben. Um das Verhalten der Laser besser überwachen zu können, wurde schließlich sogar ein Resonatorkreis aufgebaut, um sicher zu gehen, dass die Laser auf einer Mode laufen. Dabei fiel auf, dass die Frequenz der Modensprünge im Vergleich zu IFL002 so hoch war, dass man keine getrennten Transmissionsmaxima hinter dem Resonator mehr ausmachen konnte. In Anbetracht der Tatsache, dass der Piezo des Resonators mit 50 Hz betrieben wurde, liegt die Frequenz der Modensprünge schätzungsweise im Bereich von einigen hundert bis 1000 Hertz. Schließlich brachte eine geringe Veränderung des Interferenzfilter-Winkels Stabilität im erforderlichen Frequenzbereich, sodass ein Fehlersignal beobachtet werden konnte (Abbildungen 7 und 22).

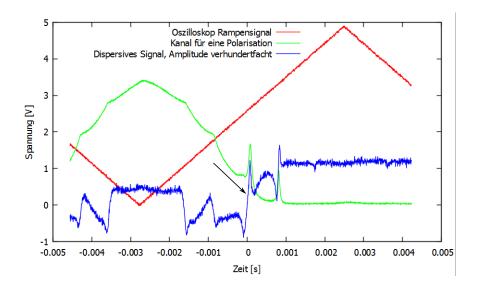


Abbildung 7: Spektroskopiesignal für IFL002. Zu sehen sind sowohl das dispersive als auch das Signal einer Polarisationsrichtung. Das Rampensignal entspricht der Spannung am Piezo. Der Pfeil zeigt den Übergang, auf den der Laser während der entsprechenden Messungen stabilisiert wurde.

## 4 Linienbreite und -form von Lasern

Auch wenn Laserlicht monochromatisch erscheint, gibt es aufgrund der Heisenberg'schen Unschärferelation sowie Rauscheffekten auch bei Eliminierung aller technischen Schwankungen eine kleinste mögliche Linienbreite. Ein Laser emittiert also niemals eine diskrete Frequenz, sondern stets ein Spektrum an Frequenzen. Die Form dieses Spektrums ist durch eine Lorentzverteilung entsprechend der natürlichen Linienbreite von atomaren Übergängen gegeben [Dem07]. In einem optimalen Laborsystem würde die Linienform eines Lasers also einer Lorentzverteilung entsprechen.

Im vorliegenden Experiment gibt es aber statistische Effekte, die berücksichtig werden müssen: Zum einen kommt es trotz Temperaturstabilisierung zu Temperaturschwankungen im Lasergehäuse und damit zu einer statistischen Veränderung der Länge des Laserresonators. Weiterhin gibt es - trotz Stabilisierung - Schwankungen in der Stromzufuhr, die die Strahlungscharakteristik der Laserdiode, sowie ebenfalls die Temperatur der Diode ändern (siehe hierzu Abschnitt 2.1). Geht man davon aus, dass diese statistischen Störeinflüsse entsprechend einer Gaußverteilung auftreten, so ist die 'reale'Linienform eines Lasers die Faltung eines Gauß und eines Lorentzprofils.

Das Profil, das bei der Faltung eines Gauß- und Lorentzprofils entsteht, heißt Voigt-Profil. Es ist definiert über das Faltungsintegral

$$V(x,\sigma,\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x',\sigma)L(x-x',\gamma)dx',$$
 (8)

wobei  $G(x,\sigma)$  eine Gaußverteilung und  $L(x,\gamma)$  eine Lorentzverteilung darstellt. Die Linienbreite eines solchen Profils  $\Gamma_V$  als Funktion der Parameter  $\sigma$  und  $\gamma$  lässt sich näherungsweise bestimmen zu [Oli99]

$$\Gamma_v \approx 0,5346 \cdot \Gamma_L + \sqrt{0,2166 \cdot \Gamma_L^2 + \Gamma_G^2}.$$
 (9)

Dabei bezeichnen  $\Gamma_G=2\sigma\sqrt{2\ln 2}$  und  $\Gamma_L=2\gamma$  die Halbwertsbreiten der Gauß- beziehungsweise Lorentzverteilung .

Das Faltungsintegral aus Gleichung 8 ist nicht analytisch lösbar. Allerdings kann man das Integral durch die Faddeeva-Funktion  $\omega(z)$  ausdrücken, für die hinreichend gute numerische Näherungen existieren [Wik13]:

$$V(x,\sigma,\gamma) = \frac{\Re(\omega(z))}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$
 (10)

Hierbei entspricht  $z = \frac{x+i\gamma}{\sigma\sqrt{2}}$ . Eine numerische Näherung der Faddeeva Funktion liegt beispielsweise in der wissenschaftlichen Bibliothek SciPy der Programmiersprache Python vor [SciPy].

Betrachtet man ein Schwebungssignal zweier Laser, so ist dessen Profil eine Faltung von zwei Voigt-Profilen und damit wieder ein Voigt-Profil [Bau12]. Unter der Annahme, dass die Linienbreiten  $\Gamma_{L,i}$  und  $\Gamma_{G,i}$  der beiden eingehenden Laser gleich sind, berechnen sich diese aus den Halbwertsbreiten  $\Gamma_{L,f}$  und  $\Gamma_{G,f}$  des resultierenden Schwebungssignals entsprechend

$$\Gamma_{L,i} = \frac{1}{2}\Gamma_{L,f}$$
 bzw.  $\Gamma_{G,i} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma_{G,f}$ . (11)

Die Analyse eines durch heterodyne Messungen gewonnen Schwebungssignal geschieht demnach über das Voigt-Profil des Signales. Dieses kann mithilfe eines Spektrum-Analysators aufgenommen werden.

# 5 Heterodyn-Messung

# 5.1 Allgemeines

Das Prinzip der Heterodyn-Messung stammt ursprünglichen aus der Untersuchung von Radiowellen. Dabei wird ein zu untersuchendes Signal mit einem bekannten, unter Umständen leicht frequenzverschobenen Referenzsignal kohärent überlagert. Das Referenzsignal wird auch Lokaler Oszillator (kurz: LO) genannt. Das resultierende Überlagerungssignal trägt dann immer noch Amplituden-, Phasen- und Frequenzmodulationsinformationen, oszilliert aber mit einer wesentlich geringeren Frequenz, die durch die Differenz der Ausgangsfrequenzen gegeben

ist.

Bei der Übertragung des Prinzips auf optische Frequenzen ist zu beachten, dass optische Frequenzen nicht direkt beobachtet werden können. Dies liegt daran, dass das elektrische Feld in diesem Frequenzbereich zu schnell oszilliert, als dass die Antwortzeit der Elektronik dafür ausreichen würde. Stattdessen wird entweder die Energie oder die Anzahl der Photonen gemessen. Da diese nichtlinear mit dem elektrischen Feld zusammenhängt, fällt das Prinzip unter den Obergbegriff nichtlineare Optik.

## 5.2 Prinzip

Überlagert man die elektrischen Felder des zu untersuchenden Lasersignals  $E_L \cos(\omega_L t + \Phi(t))$  und des Signales des lokalen Oszillators  $E_{LO} \cos(\omega_{LO} t + \Phi_{LO}(t))$ , so kann man das Gesamtfeld als Summe der Einzelfelder schreiben:

$$E_{ges} = E_L \cos(\omega_L t + \Phi_L(t)) + E_{LO} \cos(\omega_{LO} t + \Phi_{LO}(t)). \tag{12}$$

Hierbei sind die  $\Phi$ 's die zeitabhängigen Phasen der Signale. Der Detektor selbst misst die Intensität I des Signals, welche proportional zum Quadrat des elektrischen Feldes ist. Für die Intensität am Detektor gilt dann also:

$$I(t) \propto E_{ges}(t)^2 = (E_L \cos(\omega_L t + \Phi_L(t)) + E_{LO} \cos(\omega_{LO} t + \Phi_{LO}(t)))^2$$
 (13)

$$\approx E_L^2 + E_{LO}^2 + 2E_L E_{LO} \cos((\omega_L - \omega_{LO})t + \Phi_L - \Phi_{LO}).$$
 (14)

Im letzten Schritt wurde dabei benutzt, dass die Bandbreite des Detektors begrenzt ist und deshalb hochfrequente Terme  $\cos(\omega_L)$ ,  $\cos(\omega_{LO})$  und  $\cos(\omega_L + \omega_{LO})$  vernachlässigt werden. Die beiden ersten Summanden  $E_L^2$  und  $E_{LO}^2$  sind Konstantstrom-Anteile, die durch einen Hochpassfilter herausgefiltert werden können. Damit die Frequenz des Differenzenterms noch innerhalb der Bandbreite des Detektors aufgelöst werden kann, muss dafür Sorge getragen werden, dass die Frequenz des lokalen Oszillators und des Interessensignals nahe beieinander liegen.

Interessant ist weiterhin die Tatsache, dass der oszillierende Term durch eine hohe Intensität des Lokalen Oszillators beliebig verstärkt werden kann, unabhängig von der Stärke des zu untersuchenden Signals. Dabei ist aber zu beachten, dass das Signal zu Rausch-Verhältnis im Gegensatz dazu auf einen Maximalwert beschränkt bleibt [Hoe97, Enc11].

## 5.3 Selbstheterodyn-Methode

## 5.3.1 Prinzip

Die Selbstheterodyn-Methode ist eine Realisierung des Heterodyn-Aufbaus, für die allerdings kein seperater Lokaler Oszillator als Referenzsignal verwendet wird. Stattdessen wird der zu untersuchende Strahl geteilt und selbst als Referenzsignal verwendet [Wie11].

Um dies zu bewerkstelligen, wird der zu untersuchende Laserstrahl durch einen Strahlteilerwürfel in zwei Teilstrahlen geteilt. Einer dieser Teilstrahlen wird durch einen akusto-optischen Modulator (AOM) frequenzverschoben. Die Frequenzverschiebung ist gleichzeitig die Frequenz, mit der das Schwebungssignal auf der Photodiode ankommt, da sie die Differenz zwischen den Teilstrahl-Frequenzen darstellt (siehe auch Abschnitt 5.2).

Der zweite Teilstrahl wird durch eine lange Glasfaser geschickt, um eine zeitliche Verzögerung zu erreichen. Diese dient dazu, die Korrelation der Teilstrahlen zu eliminieren. Um dies zu erreichen, muss die Glasfaser im besten Falle eine Länge größer als die Kohärenzlänge  $L_{coh} = c\tau_{coh} = \frac{c}{\pi\Delta\nu}$  haben. Hierbei bezeichnet  $\tau_{coh}$  die Kohärenzzeit und  $\Delta\nu$  die Linienbreite (Halbwertsbreite). Im Hinblick auf die Ergebnisse der Messung beträgt  $L_{coh} \approx 19,1\,\mathrm{km}$  [Enc112].

Die beiden Teilstrahlen werden dann durch einen weiteren Strahlteiler übereinander gelegt und auf eine Photodiode fokussiert. Eine Skizze des Aufbaus ist in Abbildung 8 zu sehen.

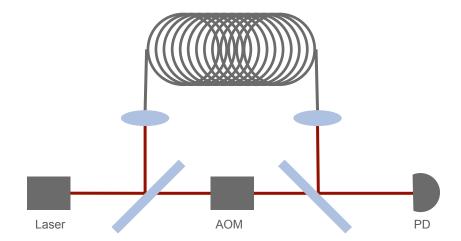


Abbildung 8: Skizze des Selbstheterodyn-Aufbaus. **AOM** Akusto-optischer Modulator, **PD** Photodiode [Ag13].

#### 5.3.2 Ergebnisse

Mithilfe der Selbstheterodyn-Messung soll der Unterschied zwischen der Linienbreite der Interferenzfilter Laser mit und ohne Stabilisierung untersucht werden. Dazu wurden die Laser jeweils einmal mithilfe der dopplerfreien Polarisations-Spektroskopie auf die in Abbildung 7 und 22 markierten Übergänge stabilisiert und einmal freilaufend an den Selbstheterodyn-Aufbau aus Abbildung 8 angeschlossen. Der akusto-optische Modulator wurde auf eine Frequenzverschiebung von 317 MHz eingestellt. Die Aufnahmen des resultierenden Spektrums wurden mit den Einstellungen aus Tabelle 4 vorgenommen.

Mittenfrequenz:	317 MHz
Frequenzspanne:	2 MHz
Durchlaufzeit:	1,91 s
Auflösungsbandbreite:	2 kHz
Videobandbreite:	2 kHz

Tabelle 4: Einstellungen des Spektrumanalysators für die Selbstheterodyn-Messung.

An die aufgenommenen Spektren wurde anschließend mit einem arbeitsgruppeninternen Analyse-Programm eine Funktion angepasst. Die Ergebnisse sind in den Abbildungen 9 und 10 zu sehen.

	IFL002 frei	IFL 002 stab.
Lorentz-Linienbreite:	$0,293~\mathrm{kHz}$	$0.573~\mathrm{kHz}$
Gauss-Linienbreite:	$5{,}175~\mathrm{kHz}$	$5,336~\mathrm{kHz}$
Güte, $\chi^2$ :	1,237	0,9937

Tabelle 5: Eigenschaften der Funktionsanpassung für die Selbstheterodyn-Messung von IFL002.

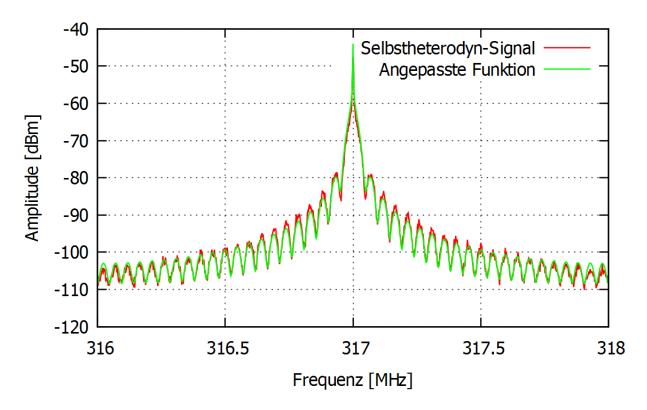


Abbildung 9: Selbstheterodyn-Messung IFL002 freilaufend. Die Eigenschaften der Funktionsanpassung finden sich in Tabelle 5.

#### 5.3.3 Fazit und Problematisierung

Obwohl die Anpassungen der Selbstheterodyn-Spektren sehr gut gelungen sind, gibt es einige Probleme bei der Auswertung dieser Spektren: Zum einen befinden sich in den Flanken des Signals mehrere Nebenmaxima. Diese sind nicht etwa ein Effekt des Lasers, sondern kommen aus der schlechten Eliminierung der Kohärenz der Teilstrahlen, genauer aus der fehlenden Länge der Verzögerungsfaser. Für die berechnete Linienbreite von ungefähr 5 kHz beträgt die Kohärenzlänge  $L_{coh} = \frac{c}{\pi \Delta \nu} \approx 19,1$  km. Die verwendete Faser hatte aus praktischen Gründen nur eine Länge von ungefähr 5 km. Weiterhin ist es durch Veränderung einiger Anpassungsparameter möglich ähnlich gute Anpassungsgüten zu erhalten, dabei aber die Parameter relevant zu verändern. Die Anpassung an sich kann also nur Auskunft über die Größenordnung der Fitparameter und damit der Linienbreite geben. Da Werte in der Größenordnung von 5 kHz sehr gering sind, soll dennoch eine zweite, genauere Methode zur Messung der Linienbreite angewendet werden. Diese basiert ebenfalls auf der Heterodyn-Methode, nutzt aber einen anderen

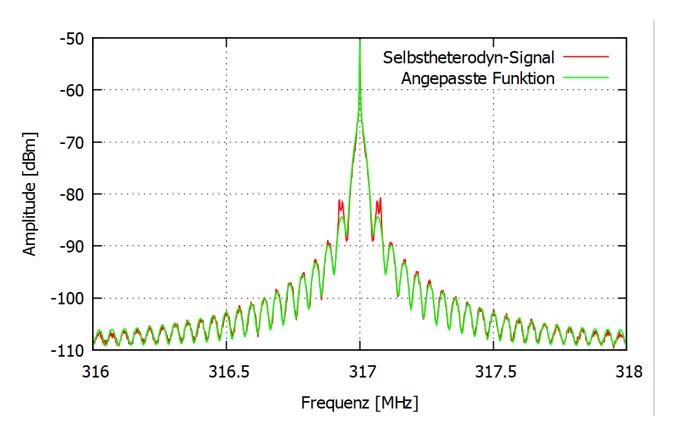


Abbildung 10: Selbstheterodyn-Messung IFL002 stabilisiert. Die Eigenschaften der Funktionsanpassung finden sich in Tabelle 5.

Laser gleicher Bauart als lokalen Oszillator.

Eine weitere Beobachtung während der Selbstheterodyn-Messung war die Abhängigkeit der Linienbreite von der Stabilität des Lasers hinsichtlich Modensprüngen. Die Auswertung verschiedener Signale hat gezeigt, dass steilere Nebenmaxima zu einer geringeren Linienbreite führen [Ag13]. Die Form der Nebenmaxima hängt dabei entscheidend von den Laufeigenschaften des Lasers ab. Schon im Vergleich von IFL002 (Abbildungen 9 und 10) und IFL001 (Abbildungen 20 und 21) fällt auf, dass IFL001 kein so ausgeprägtes Muster aufzeigt wie IFL002. Entsprechend der Beobachtung sind damit auch die Linienbreiten größer. Dies ist darauf zurückzuführen, dass IFL001 schon beim Aufbau der Spektroskopie große Probleme hinsichtlich der Modenstabilität bei Variation von Temperatur und Strom zeigte (siehe auch Abschnitt 3.3).

## 5.4 Optische Heterodyn-Methode

#### 5.4.1 Prinzip

Wie in Abschnitt 5.2 beschrieben besteht das Prinzip der Heterodyn-Methode darin, zwei Laserstrahlen zu überlagern und das Schwebungssignal auf einer Photodiode zu betrachten. Dazu werden die beiden Laser mithilfe eines Strahlteilerwürfels übereinander gelegt und durch einen Polarisator geschickt. Dieser dient dazu, nur Anteile gleicher Polarisation wechselwirken zu lassen. Um die Deckung der Strahlen zu überprüfen, werden die Strahlen außerdem unabhängig voneinander in eine Glasfaser gekoppelt. Dies stellt sicher, dass die Strahlen bei der Auskopplung bestmöglich übereinander liegen. Anschließend wird der resultierende Strahl durch eine Linse auf eine schnelle Photodiode (Thorlabs Inc. PDA10A-EC) fokussiert. Das Signal wird dann mit einem Spektrum-Analysator des Typs N9010A von Agilent Technologies untersucht. Eine Skizze des Aufbaus ist in Abbildung 11 zu sehen.

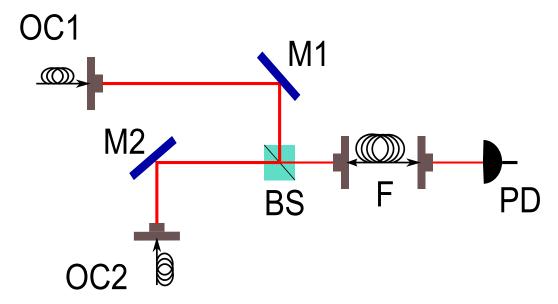


Abbildung 11: Skizze des Heterodyn-Aufbaus.  $\mathbf{OC}$  Faserauskopplung,  $\mathbf{M}$  Spiegel,  $\mathbf{BS}$  Strahlteilerwürfel,  $\mathbf{F}$  Glasfaser mit Ein- und Auskopplung,  $\mathbf{L}$  Linse,  $\mathbf{PD}$  Photodiode.

#### 5.4.2 Auswertung

Nachdem der Aufbau fertiggestellt war, wurde das Schwebungssignal mithilfe des Spektrum-Analysators sichtbar gemacht. Das resultierende Signal für eine Frequenzspanne von 500 MHz ist in Abbildung 12 zu sehen.

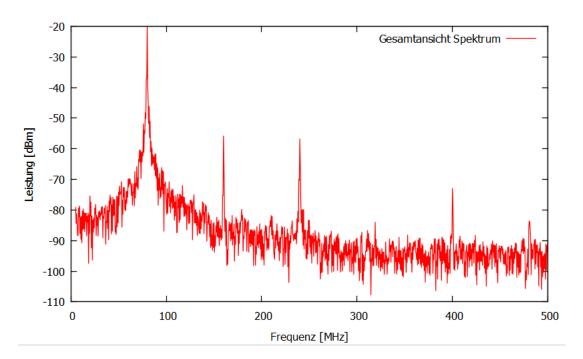


Abbildung 12: Übersicht des resultierenden Schwebungssignals des Heterodyn-Aufbaus.

Die kleineren Peaks im Spektrum sind dabei höhere Ordnungen des Schwebungssignals. Um zu überprüfen, ob es sich bei den Peaks wirklich um Schwebungseffekte handelt, ist es möglich, einen einzelnen Laserarm im Experiment zu blocken. Unabhängig davon, welcher Laser geblockt wird, verschwindet daraufhin das Schwebungssignal.

Um die erste Schwebungsordnung nun getrennt auf ihre Linienbreite untersuchen zu können, wurde der Spektrum-Analysator wie in Tabelle 6 eingestellt.

Frequenzspanne:	10 MHz
Durchlaufzeit:	168  ms
Auflösungsbandbreite:	100 kHz
Videobandbreite:	30 kHz

Tabelle 6: Einstellungen des Spektrumanalysators für die Heterodyn-Messung.

Da einzelne Aufnahmen des Schwebungssignal aufgrund von Rauscheffekten und Sprüngen der Mittenfrequenz keine auswertbaren Ergebnisse lieferten, war es nötig, eine Vielzahl von Messungen zu machen, diese zu zentrieren und zu mitteln. Aus diesem Grund wurden über einen Zeitraum von ungefähr einer Minute mehrere Messungen mithilfe der *Quicksave*-Funktion des Spektrum-Analysators gemacht.

Die Auswertung selbst erfolgte mit einer modifizierten Version des von Michael Bauer freundlicherweise zur Verfügung gestellten Python-Programmes, dass dieser bereits zur Auswertung

von Schwebungssignalen anderer Laser nutzte (Anhang C) [Bau12]. Das Programm nutzt die bereits in Abschnitt 4 erwähnte wissenschaftliche Bibliothek SciPy und deren numerische Implementation der Faddeeva-Funktion, um die in Gleichung 10 gegebene Darstellung des Voigt-Profiles mithilfe der Methode der kleinsten Quadrate an die einzelnen Spektren anzupassen und so deren Mittenfrequenz zu bestimmen. Entsprechend der so bestimmten Mittenfrequenz werden die Spektren auf eine Frequenz von 0 MHz zentriert und gemittelt. An das gemittelte Spektrum wird dann erneut ein Voigt-Profil angepasst, dessen Linienbreite Auskunft über die Charakteristik der Laser gibt.

Auf diese Weise wurden jeweils drei Messungen für die stabilisierten und freilaufenden Laser durchgeführt. Die Ergebnisse sind in den Abbildungen 13 bis 18 zu sehen. Die Parameter des angepassten Voigt-Profils können ebenfalls den Abbildungen entnommen werden.

Anhand der in den Grafiken dargestellten Anpassungsparameter der Voigt-Profile kann nun die Linienbreite eines einzelnen Lasers bestimmt werden. Dazu errechnet man nach Gleichung 11 die Gauss- beziehungsweise Lorentz-Linienbreiten  $\Gamma_G$  und  $\Gamma_L$  für einen der Laser, die in die Faltung eingehen. Anschließend kann über Gleichung 9 die resultierende Voigt-Linienbreite eines Lasers berechnet werden.

Nimmt man aufgrund der Schwankung der jeweiligen Linienbreiten auf  $\Gamma_G$  einen Fehler von  $\Delta\Gamma_G = 20$  kHz und auf  $\Gamma_L$  einen Fehler von  $\Delta\Gamma_L = 15$  kHz an, so ergibt sich als gemittelte Linienbreite für einen auf die in Abbildung 7 und 22 markierten Übergänge stabilisierten Laser:

$$\Gamma_{V, \text{ stab.}} = (174 \pm 9) \text{ kHz} \tag{15}$$

Analog berechnet sich die gemittelte Linienbreite für einen freilaufenden Laser zu:

$$\Gamma_{V, \text{ frei}} = (123 \pm 9) \text{ kHz} \tag{16}$$

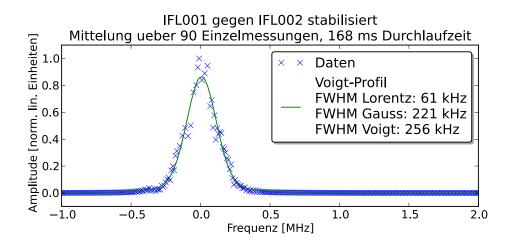


Abbildung 13: Messung stabilisierte Laser 1.

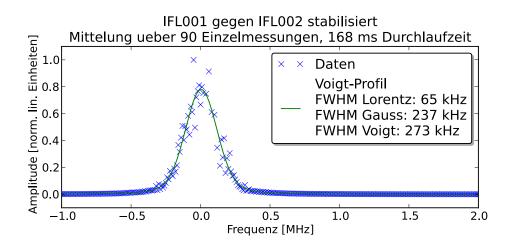


Abbildung 14: Messung stabilisierte Laser 2.

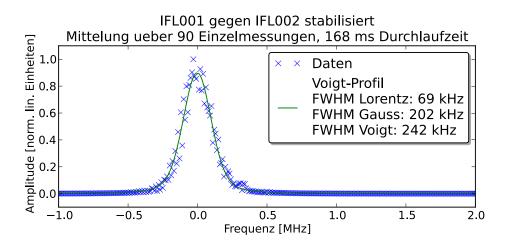


Abbildung 15: Messung stabilisierte Laser 3.

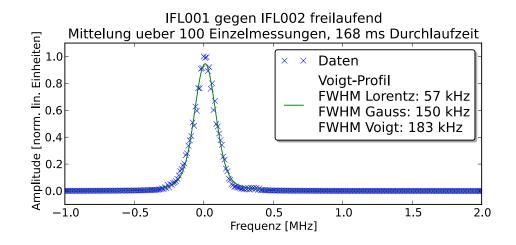


Abbildung 16: Messung freie Laser 1.

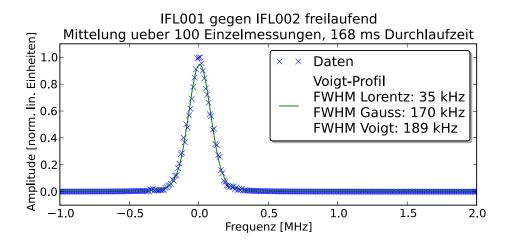


Abbildung 17: Messung freie Laser 2.

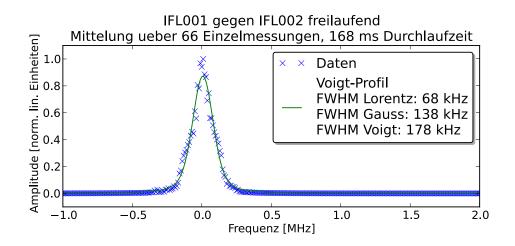


Abbildung 18: Messung freie Laser 3.

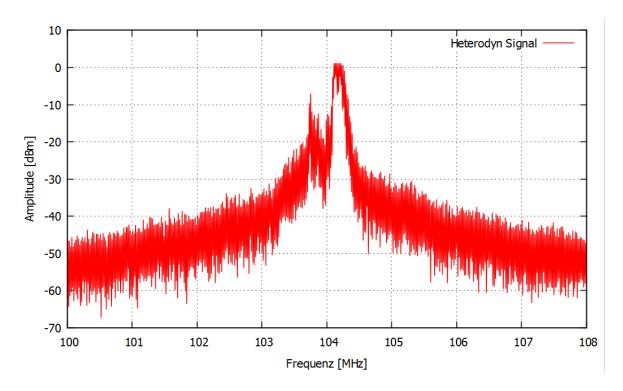


Abbildung 19: Aufnahme eines einzelnen Heterodyn-Spektrums mit den Einstellungen aus Tabelle 6. Zu sehen ist, dass die Mittenfrequenz der Linie während dem Durchlauf gesprungen ist. Dies macht sich dadurch bemerkbar, dass man zwei Signal-Maxima sieht.

#### 5.4.3 Fazit und Problematisierung

Wie bereits in Abschnitt 4 erwähnt gibt es gaußverteilte statistische Faktoren, die zu einer Schwankung der lorentzförmigen Linienbreite eines Laser führen. Diese Schwankungen können je nach ihrer Natur schnell oder langsam gegenüber der Messzeit auftreten und sich damit entweder als langsamer Drift oder Springen (bei längerer Messzeit: Verbreiterung) der Frequenzmitte bemerkbar machen. Das Ziel dieser Bachelorarbeit war es, möglichst nahe an die intrinsische Linienbreite der Laser heranzukommen, um diese zu vermessen. Um dies zu erreichen, ist es nötig, die Messzeit der einzelnen Spektren so einzustellen, dass Sprünge der Linie nicht innerhalb der Durchlaufzeit des Spektrum-Analysators passieren. Dies gestaltete sich in der Realität schwierig: Da die Sprünge der Linie sehr hochfrequent waren, hatten Messungen, deren Durchlaufzeit geringer als die mittlere Sprungzeit der Linie waren, eine sehr geringe Auflösung. Dies konnte auch nicht durch eine Verringerung der Frequenzspanne kompensiert werden, da die Linien sonst aus dem Frequenzbereich sprangen. Messungen, die mit einer so geringen Durchlaufzeit aufgenommen wurden, hatten nicht genug Messpunkte innerhalb des Linienbereichs, als dass es möglich gewesen wäre, sinnvoll ein Voigt-Profil an die Messungen anzupassen. Auch eine Variation von Strom und Temperatur der Diode brachten nicht den erwünschten Erfolg. Das Bild eines einzelnen Spektrums ist in Abbildung 19 zu sehen.

Um einen Kompromiss zwischen Auflösung und Auswertbarkeit zu gewährleisten, wurde der Spektrum-Analysator für die finalen Messungen so eingestellt, dass eine ausreichende Anzahl von Messpunkten vorhanden war bei möglichst geringer Durchlaufzeit und möglichst hoher Auflösungsbandbreite (Einstellungen in Tabelle 6). Nichtsdestotrotz sieht man anhand der

Breite des Gauß-Anteils der Voigt-Anpassungen, dass die hochfrequenten statistischen Einflüsse auf die Linienbreite bei den Messungen nicht vernachlässigbar sind.

Die Ergebnisse passen größenordnungsmäßig zu früheren Messungen [Bau12, Phi13]. Im Hinblick auf die Selbstheterodyn-Messungen aus Abschnitt 5.3 ist trotzdem ein erheblicher Unterschied in der Linienbreite erkennbar. Dies kann zum Teil daran liegen, dass in der Selbstheterodyn-Messung Sprünge in der Mittenfrequenz, dadurch dass sie in beiden interferierenden Armen passieren, keine übergeordnete Relevanz für das Spektrum haben. Zum Anderen ist der Einfluss der zu kurzen Faser zu diskutieren - eine Messung mit Faser geeigneter Länge könnte unter Umständen realistischere Ergebnisse liefern.

Zwischen den Messungen der stabilisierten und freilaufenden Laser besteht im Gegensatz zur Selbstheterodyn-Methode ein nennenswerter Unterschied von ungefähr 50 kHz. Dies ist eher zu erwarten, als dass kein Unterschied existiert. Zwar sorgt der Rückkopplungskreis dafür, dass es keine Frequenzdrifts über lange Zeiträume gibt, dennoch ist die Reaktionszeit der Lockbox begrenzt gegenüber kurzen Frequenzsprüngen. Eine Verbreiterung der Linie durch die Stabilisierung kann dadurch entstehen, dass es eine geringfügige Regelung in Richtung der stabilisierten Frequenz gibt. Diese macht sich im Spektrum bemerkbar. Nichtsdestotrotz war der Einfluss der Stabilisierung insofern positiv, als dass die Frequenzspanne, in der die Linie während der Messung gewandert ist, verringert wurde. Für ein größeres Experiment, in dem Laser über lange Zeiträume (teilweise über mehrere Wochen) durchgehend laufen müssen, ist ein Stabilisierungskreis also durchaus sinnvoll. Die schnellen Sprünge der Schwebungsfrequenz könnten dabei unter Umständen mithilfe einer Raman-Stabilisierung verhindert werden (vgl [Nic08]).

# 6 Zusammenfassung und generelles Fazit

Im Laufe dieser Bachelorarbeit sollten zwei Interferenzfilter-Laser mit und ohne Stabilisierung vermessen werden. Dazu wurde in einem ersten Schritt einer der Laser ein- und fertiggestellt. Danach wurden für beide Laser dopplerfreie Polarisations-Spektroskopien aufgebaut, um ein Fehlersignal für einen Rückkopplungskreis zur Stabilisierung zu erhalten. Um letztendlich eine Aussage über die Linienbreite der Laser mit und ohne Stabilisierung machen zu können, wurden beide mithilfe eines bereits vorhandenen Selbstheterodyn-Aufbaus untersucht. Da diese Untersuchung außerordentlich geringe Linienbreiten in der Größenordnung von 5 kHz zeigte, sollte daraufhin eine genauere Messung mit dem Schwebungssignal beider Laser durchgeführt werden. Aus diesem Grunde wurde ein Heterodyn-Experiment aufgebaut. Mithilfe des Schwebungssignals der beiden Laser wurden dann die Linienbreiten der stabilisierten und unstabilisierten Laser zu  $\Gamma_{V, \text{ frei}} = (123 \pm 9) \text{ kHz}$  und  $\Gamma_{V, \text{ stab.}} = (174 \pm 9) \text{ kHz}$ gemessen. Dieses Ergebnis unterscheidet sich erheblich von dem der Selbstheterodyn-Methode. Mögliche Gründe dafür sind der suboptimale Selbstheterodyn-Aufbau, sowie eine Kompromiss-Einstellung des Spektrum-Analysators. Generell kann man sagen, dass die Laserstabilisierung zwar die Linienbreite negativ beeinflusst, zur Langzeitstabilisierung aber dennoch sinnvoll ist. Eine Möglichkeit zukünftige Aufbauten zu modifizieren wäre statt der hier gewählten Spektroskopiemethode eine Raman-Spektroskopie zur Erzeugung des Fehlersignals zu verwenden. Außerdem sollte in Betracht gezogen werden, die Charakteristik von IFL001 noch einmal

zu überprüfen und eventuell verbessernde Einstellungen am Aufbau, sowie dem Resonator vorzunehmen. Dies schließt insbesondere ein den Interferenzfilter neu zu platzieren und die Resonatoreigenschaften nochmals zu prüfen.

Als generelles Fazit kann man das Experiment durchaus als gelungen bezeichnen. Sämtliche Messungen haben, bis auf einige kleinere Probleme, funktioniert und reproduzierbare Ergebnisse geliefert, die sich mit den Erwartungen gedeckt haben. Zwar sind einige Unterschiede zwischen den Ergebnissen der gewählten Messtechniken vorhanden, aber um eine genauere Aussage über deren Relevanz machen zu können, ist es nötig, erweiternde Betrachtungen zu machen, die den Rahmen sprengen würden. Im Rahmen der gegebenen Zeit war es jedoch möglich, die Aufgabenstellung in geeignetem Umfang zu bearbeiten.

# Literatur

- [Ag13] AG Meschede, Evernote Notizen, IFL Manual, 2013
- [Bai06] X. Baillard, A. Gauguet, S. Bize, P. Lemonde, P. Laurent, A. Clairon und P. Rosenbusch. *Interference-filter-stabilized external-cavity diode lasers*. Opt. Commun. 266 (2): 609613 (2006). DOI 10.1016/j.optcom.2006.05.011.
- [Bau12] M. Bauer, Linewidth measurement of a Toptica DL pro and a Radiant Dyes Narrow-Diode diode laser, Worknote (2012)
- [Dem05] W. Demtröder. Experimentalphysik 3 Atome, Molekle und Festkörper, (Springer, Berlin Heidelberg New York, 2005) ISBN 3-540-21473-9
- [Dem07] W.Demtröder. Lasersprektroskopie (5. Auflage), (Springer, Berlin Heidelberg, 2007) ISBN 978-3-540-33792-8
- [Dem11] W. Demtröder. Laserspektroskopie 1 Grundlagen, (Springer, Heidelberg Dordrecht London New York, 2011)
- [Enc11] R. Paschotta . *Optical Heterodyne Detection*. Encyclopedia of Laser Physics and Technology. RP Photonics (2011)
- [Enc112] R. Paschotta . *Coherence Length*. Encyclopedia of Laser Physics and Technology. RP Photonics (2011)
- [Enc113] R. Paschotta. *Schawlow-Townes Linewidth*. Encyclopedia of Laser Physics and Technology. RP Photonics (2011)
- [Hoe97] J. Höffges, Untersuchungen der Resonanzfluoreszenz eines einzelnen gespeicherten Ions, (Herbert Utz Verlag, 1997)
- [Kne08] F. K. Kneubühl, M. W. Sigrist. Laser, (Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2008) ISBN 978-3-8351-0145-6
- [Lit01] C. J. Hawthorn et al., Littrow configuration tunable external cavity diode laser with fixed direction output beam, Rev. Sci. Instrum. 72 (12), 4477 (2001)
- [Mes08] D. Meschede. *Optik, Licht und Laser*, (Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2008) ISBN 978-3-8351-0143-2
- [Nic08] E. Nicklas. Setup and Test of a Raman Laser System. Diplomarbeit, 2008
- [Oli99] Olivero, J.J.; R.L. Longbothum (1977-02). Empirical fits to the Voigt line width: A brief review. Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer 17 (2): 233236.
- [Phi13] J. Phieler. Ein phasenstabiles Lasersystem für kohärente Raman-Übergänge in ultrakalten Rubidium- und Caesium-Atomen, Diplomarbeit, Januar 2013
- [Pra08] Uni Heidelberg, Unterlagen zum Fortgeschrittenenpraktikum, Versuch F16 Laserspektroskopie, http://www.mpi-hd.mpg.de/praktika/FP16/, 2008

- [SciPy] http://www.scipy.org, aufgerufen am 10.07.2013
- [Sem13] http://www.semibyte.de/, aufgerufen am 14.07.2013
- [Wie76] C. Wieman, T.W. Hänsch. Doppler-Free Laser Polarization Spectroscopy, Phys. Rev. Let. Vol. 36, 20 (1976)
- [Wie11] J. Wienands. Construction and Characterization of a Prototype External Cavity Diode Laser, Diplomarbeit
- [Wik13] http://de.wikipedia.org/wiki/Voigt-Profil, aufgerufen am 10.07.2013

# Danksagung

Ich möchte mich herzlich bei Prof. Dr. Dieter Meschede und der gesamten Quantum Technologies Arbeitsgruppe des IAP für die überaus freundliche Aufnahme und Unterstützung in ihrer wissenschaftlichen Gemeinschaft bedanken. Auch abseits meiner Bachelorarbeit habe ich mich sehr wohl und gut aufgehoben gefühlt.

Insbesondere möchte ich mich außerdem bei meinem Betreuer Stefan Brakhane für die stets freundliche, geduldige und kompetente Hilfe und Beratung bedanken.

Darüber hinaus danke ich Michael Bauer von der Universität Kaiserslautern für die bereitwillige Zurverfügungstellung seines Auswertungsprogrammes und für das Beantworten meiner Fragen zu eben diesem.

Weiterhin danke ich Jana Huisman, Erik Schäfer, Björn-Eric Reitz, Stefan Brakhane und Andreas Steffen für das Korrekturlesen dieser Arbeit. Außerdem danke ich allen nicht Genannten, die einen Beitrag zu dieser Arbeit geliefert haben.

Gerne möchte ich auch noch meiner Familie und meinen Freunden für die stetige Unterstützung während meines Studiums und insbesondere dieser Arbeit danken.

Zu guter Letzt danke ich Wolfgang Alt für die Übernahme der Zweitkorrektur meiner Arbeit.

# ${\bf Abbildung sverzeichnis}$

1	Skizze einer Laserdiode [Sem13]	2
2	Skizze eines Interferenzfilter-Lasers	4
3	Messung der Diodenleistung	6
4	Messung der Laserleistung	6
5	Skizze der verwendeten Spektroskopie	9
6	Skizze der Stabilisierungsschaltung	10
7	Spektroskopie Signal IFL002	11
8	Skizze des Selbstheterodyn-Aufbaus	14
9	Selbstheterodyn-Messung IFL002 freilaufend	15
10	Selbstheterodyn-Messung IFL002 stabilisiert	16
11	Skizze des Heterodyn-Aufbaus	17
12	Schwebungssignal, Frequenzspanne 500 MHz	18
13	Messung stabilisierte Laser 1	20
14	Messung stabilisierte Laser 2	20
15	Messung stabilisierte Laser 3	20
16	Messung freie Laser 1	21
17	Messung freie Laser 2	21
18	Messung freie Laser 3	21
19	Aufnahme eines einzelnen Heterodyn-Spektrums	22
20	Selbstheterodyn-Messung IFL001 freilaufend	30
21	Selbstheterodyn-Messung IFL001 freilaufend	30
22	Spektroskopiesignal IFL001	31
23	Reales Bild eines Interferenzfilter-Lasers	36
24	Reales Bild des Heterodyn-Aufbaus	37
25	Reales Bild einer Dopplerfreien Polarisations-Spektroskopie	38
Taba	ellenverzeichnis	
Tabe	enenverzeichnis	
1	Daten der Interferenzfilter-Laser	4
2	Verstimmbarkeit IFL001	5
3	Anpassungsparameter der linearen Funktionen in Abbildung 4	5
4	Einstellungen des Spektrumanalysators für die Selbstheterodyn-Messung	14
5	Selbstheterodyn Messung IFL002	15
6	Einstellungen des Spektrumanalysators für die Heterodyn-Messung	18
7	Einstellungen des Spektrumanalysators für die Selbstheterodyn-Messung	29
Q	Funktionsennessung IFL 001 Selbetheteredum Messung	20

# A Selbstheterodyn-Messung IFL001

Mittenfrequenz:	317 MHz
Frequenzspanne:	$2 \mathrm{\ MHz}$
Durchlaufzeit:	1,91 s
Auflösungsbandbreite:	2 kHz
Videobandbreite:	2 kHz

Tabelle 7: Einstellungen des Spektrumanalysators für die Selbstheterodyn-Messung

	IFL001 frei	IFL001 stab.
Lorentz-Linienbreite:	$2,405~\mathrm{kHz}$	$2,307~\mathrm{kHz}$
Gauss-Linienbreite:	$5,445~\mathrm{kHz}$	$5,482~\mathrm{kHz}$
Güte, $\chi^2$ :	0,2507	0,5291

Tabelle 8: Eigenschaften der Funktionsanpassung für die Selbstheterodyn-Messung von IFL001

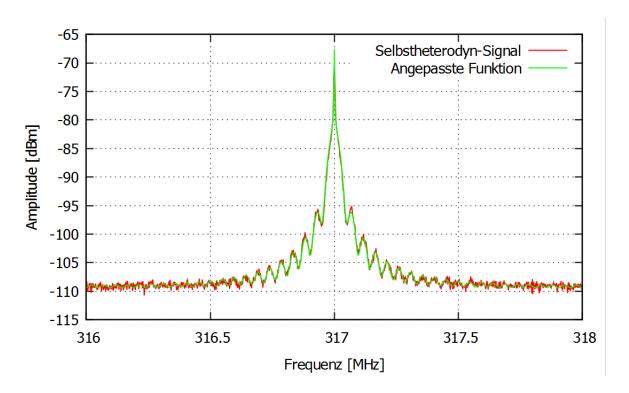


Abbildung 20: Selbstheterodyn-Messung IFL001 freilaufend. Die Eigenschaften der Funktionsanpassung finden sich in Tabelle 8.

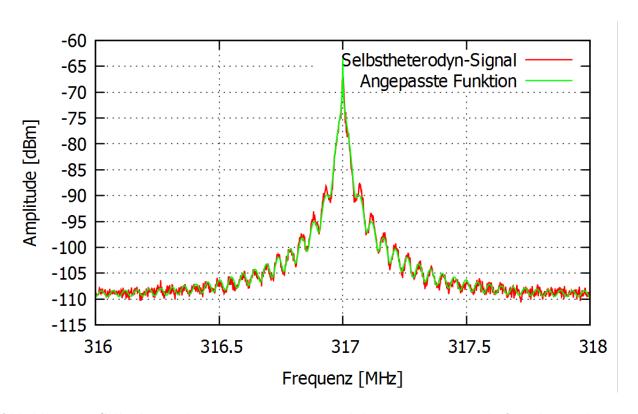


Abbildung 21: Selbstheterodyn-Messung IFL001 stabilisiert. Die Eigenschaften der Funktionsanpassung finden sich in Tabelle 8.

# B Spektroskopiesignal IFL001

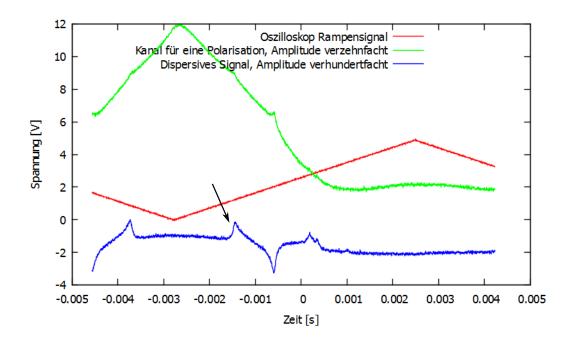


Abbildung 22: Spektroskopiesignal IFL001. Zu sehen sind sowohl der Kanal für eine Polarisation als auch das dispersive Signal. Das Rampensignal entspricht der Spannung am Piezo. Der Pfeil zeigt den Übergang, auf den der Laser während der entsprechenden Messungen stabilisiert wurde.

# C Auswertungsprogramm

```
import re
import string
import math
from scipy import special
import scipy.optimize as opt
import numpy as np
import matplotlib
matplotlib.use('SVG')
import matplotlib.pyplot as plt
#this program has the purpose to analyze an arbirtrary amount of heterodyne
    measurements in order to achieve the
#Full Width at Half Maximum of the resulting voigt-profile. The single
   spectra are centered and averaged, the
#resulting voigtian is plotted.
#The program was written by Michael Bauer from the university of
   Kaiserslautern and modified by Martin Link
#for his Bachelor thesis.
def read_spectrum_analyser(filename):
        #parses csv file from Agilent Technologies N9010A Spectrum Analyzer
        freqs=[]
        values=[]
        f = open(filename)
        line = f.readline()
        while line:
                matchObj = re.match(r'\d+, -\d+.\d+', line, re.M|re.I)
                if matchObj:
                        splitted=string.split(matchObj.group(), ',')
                        value=splitted[1]
                        freq=splitted[0]
                        values.append(10**(float(value)/10.0))
                        freqs.append(float(freq)/1000000)
                line = f.readline()
        f.close()
        return (freqs, values)
def gauss(p,x):
        [0]q=0x
        sigma=p[1]
        amp=p[2]
        offset=p[3]
        #subtract offset and convert to linear amplitude
        return amp*np.exp(-1/(2*sigma**2)*(x-x0)**2)+offset
def voigt(p,x):
        #definition from wiki
        x0=p[0]
        gamma=p[1]
        sigma=p[2]
```

```
amp=p[3]
        offset=p[4]
        tmp=offset+amp*special.wofz((x-x0+1j*abs(gamma))/(abs(sigma)*math.
           sqrt(2.0)))
        return tmp.real
def err_voigt(p,x,y):
        return voigt(p,x) - y
measurement = 2 #The measurement that's going to be analyzed
step_size = 0.01 #The stepsize of the measurement
if measurement == 1:
        #first measurement
        sum_file="path1\\sum1_filename" #Path for saving the sum
        sum_title="title_1"
        single_title="title_2"
        files=[ \
        #this array should contain the single measurements for averaging
        # "path \\filename.csv", \
elif measurement == 2:
        #second measurement
        sum_file="path2\\sum2_filename"
        sum_title="title_1"
        single_title="title_2"
        files=[\
        1
datas=[]
for file in files:
        data=read_spectrum_analyser(file)
        datas.append(data)
max_intensity=0
for data in datas:
        if max_intensity < max(data[1]):</pre>
                max_intensity=max(data[1])
for index,data in enumerate(datas):
        file=files[index]
        #initial guess
        center= data[0][data[1].index(max(data[1]))]
        p1 = np.array([center, 0.1, 0.5000, 0.002, 0.0])
        p1[0]=center
        print "fitting ",file
        p1, success = opt.leastsq(err_voigt, p1[:],args=(data[0],data[1]),
           maxfev=5000)
        center_freq=p1[0]
        fwhm_l=abs(p1[1]*2)
        fwhm_g = 2*math.sqrt(2*math.log(2))*abs(p1[2])
```

```
fwhm_v=0.5346*fwhm_l+math.sqrt(0.2166*fwhm_l**2+fwhm_g**2)
        #center the spectra to zero MHz
        \#all\ the\ round() commands are to make sure, each single spectra
            contains compatible frequencys, so that they can be summed up
            later on
        data[0][:] = [ (step_size*round((x-step_size*round(center_freq/
            step_size))/step_size)) for x in data[0][:] ]
        center_freq=center_freq-step_size*round(center_freq/step_size)
        p1[0]=center_freq
        print "plotting",file
        fig = plt.figure(figsize=(8,4),dpi=100)
        ax = fig.add_subplot(111)
        normalized_data=np.asarray([ x/max_intensity for x in data[1] ])
        ax.plot(data[0], normalized_data, "x")
        ax.plot(data[0], voigt(p1, data[0])/max_intensity)
        plt.legend(("data", "Voigt-function\nFWHM Lorentz: "+"%-.0f"%(fwhm_1
            *1e3)+' kHz\nFWHM Gauss: '+"%-.0f"%(fwhm_g*1e3)+' kHz\nFWHM
            Voigt: '+"%-.0f"%(fwhm_v*1e3)+' kHz'), shadow=True,fancybox=True
        ax.set_title(single_title)
        ax.set_ylabel('Amplitude [lin. arb. units]')
        ax.set_xlabel('Frequency [MHz]')
        ax.set_xlim([-1,2])
        ax.set_ylim([-0.1,1.1])
        fig.savefig(file+".svg",bbox_inches='tight')
#create a summed up graph for better visibility
print "summing up"
sum=list(datas[0])
sum[1] = [0] * len(sum[0])
for index,data in enumerate(datas):
        for index2,freq in enumerate(data[0]):
                 freq_index=sum[0].index(freq) if freq in sum[0] else None
                 if freq_index:
                         sum[1][freq_index]=sum[1][freq_index]+data[1][
                            index21
print "plotting sum"
data=sum
#initial guess
p1 = np.array([0, 0.1, 0.04, 1.0, 0.0])
print "fitting"
p1, success = opt.leastsq(err_voigt, p1[:],args=(data[0],data[1]),maxfev
   =55000)
fwhm_l=abs(p1[1]*2)
fwhm_g = 2*math.sqrt(2*math.log(2))*abs(p1[2])
fwhm_v=0.5346*fwhm_1+math.sqrt(0.2166*fwhm_1**2+fwhm_g**2)
fig = plt.figure(figsize=(8,3),dpi=1000)
ax = fig.add_subplot(111)
ax.plot(data[0],([x/max(data[1]) for x in data[1]]),"x")
ax.plot(data[0],voigt(p1, data[0])/max(data[1]))
```

```
plt.legend(("Daten","Voigt-Profil\nFWHM Lorentz: "+"%-.0f"%(fwhm_1*1e3)+'
    kHz\nFWHM Gauss: '+"%-.0f"%(fwhm_g*1e3)+' kHz\nFWHM Voigt: '+"%-.0f"%(
    fwhm_v*1e3)+' kHz'), shadow=True, fancybox=True)
ax.set_title(sum_title)
ax.set_ylabel('Amplitude [norm. lin. Einheiten]')
ax.set_xlabel('Frequenz [MHz]')
ax.set_xlim([-1,2])
ax.set_ylim([-0.1,1.1])
file=sum_file
fig.savefig(file+".svg",bbox_inches='tight')
```

# D Bilder der Versuchsaufbauten

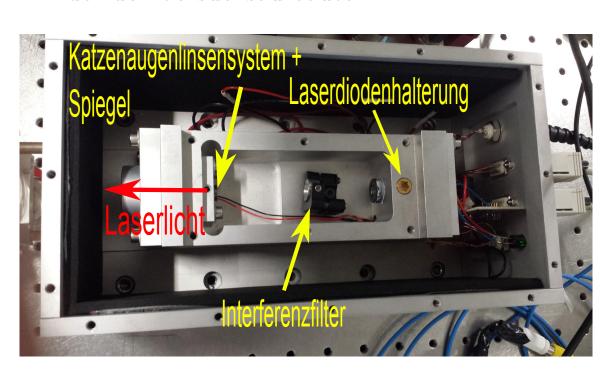


Abbildung 23: Reales Bild eines Interferenzfilter-Lasers.

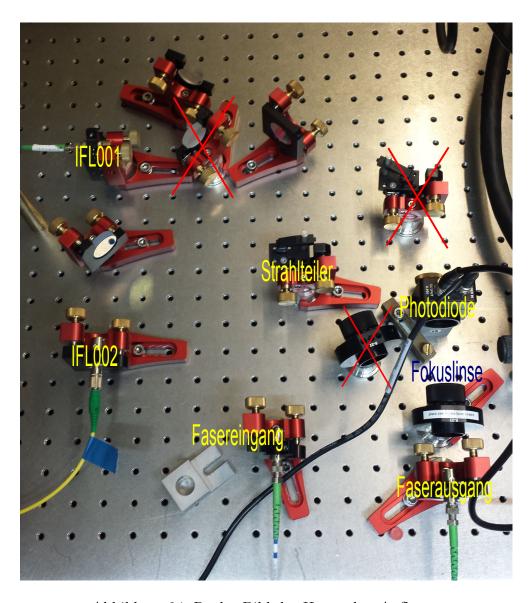


Abbildung 24: Reales Bild des Heterodyn-Aufbaus.

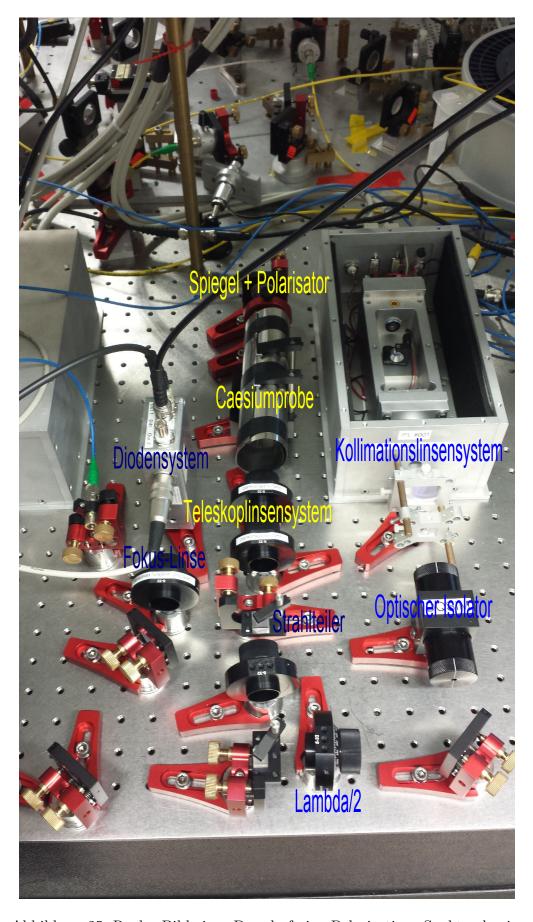


Abbildung 25: Reales Bild einer Dopplerfreien Polarisations-Spektroskopie.

Erklärung der Eigenständigkeit
Ich versichere, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie die Zitate kenntlich gemacht habe.

Unterschrift: \_\_\_\_\_

Bonn, den \_\_\_\_\_