

**Analyse der Punktspreizfunktion des  
Abbildungssystems vom DQSIM-Experiment  
anhand der Fluoreszenzaufnahmen**

Weiqi Zhou

Bachelorarbeit in Physik  
angefertigt im Institut für Angewandte Physik

vorgelegt der  
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der  
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität  
Bonn

August 2016

Ich versichere, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie die Zitate kenntlich gemacht habe.

Bonn, .....  
Datum

.....  
Unterschrift

1. Gutachter: Prof. Dr. Dieter Meschede
2. Gutachter: Dr. Andrea Alberti

Ganz besonders möchte ich Dr. Andrea Alberti, Dr. Wolfgang Alt, Dr. Geol Moon, Stefan Brakhane und Carsten Robens danken, die meine Arbeit durch ihre fachliche Unterstützung begleitet haben und durch deren Anregungen meine Arbeit kontinuierlich verbessert wurde.



# Inhaltsverzeichnis

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Einleitung</b>   | <b>2</b>  |
| <b>2</b> | <b>Die Theorie der Bildentstehung und die experimentelle Realisierung</b> | <b>3</b>  |
| 2.1      | Theorie der Bildentstehung . . . . .                                      | 3         |
| 2.1.1    | Die Punktspreizfunktion (PSF) . . . . .                                   | 3         |
| 2.1.2    | Das Faltungsproblem . . . . .   | 4         |
| 2.1.3    | Das diskrete Problem (Pixelung) . . . . .                                 | 5         |
| 2.1.4    | Rauschen und Rauschquellen . . . . .                                      | 5         |
| 2.2      | Der experimentelle Aufbau . . . . .                                       | 6         |
| 2.3      | Fluoreszenzaufnahmen und Herausforderungen . . . . .                      | 8         |
| <b>3</b> | <b>Untersuchung der realen NA und des Strehl-Verhältnisses</b>            | <b>9</b>  |
| 3.1      | Vorbereitung . . . . .  | 9         |
| 3.2      | Anwendung der Fourier-Optik . . . . .                                     | 9         |
| 3.2.1    | Abbe-Cutoff und Subpixel-Auflösung . . . . .                              | 9         |
| 3.2.2    | Simulierte Atome ohne Aberrationen . . . . .                              | 10        |
| 3.3      | Abschätzung der realen NA und des Strehl-Verhältnisses . . . . .          | 12        |
| <b>4</b> | <b>Analyse der optischen Aberrationen</b>                                 | <b>14</b> |
| 4.1      | Zernike-Polynome und Wellenfront-Deformation . . . . .                    | 14        |
| 4.2      | Untersuchung der Aberrationen des Systems . . . . .                       | 15        |
| <b>5</b> | <b>Zusammenfassung</b>  | <b>17</b> |
| <b>6</b> | <b>Anhang</b>   | <b>18</b> |

# 1 Einleitung

In der Quanteninformatik ist der sog. „Quantum Walk“ ein quantenmechanisches Analogon der klassischen Zufallswanderung (*engl. random walk*). In einem Experiment unserer Arbeitsgruppe - dem DQSIM-Experiment (*engl. 2D discrete quantum simulator*) werden neutrale Cäsiumatome zuerst in einem zweidimensionalen optischen Gitter durch eine induzierte Dipolkraft<sup>1</sup> gefangen. Sollte jetzt ein Lichtgitter verschoben werden, hängt es vom Quantenzustand des Atoms ab, in welche Richtung sich dieses Atom bewegt - die Atome wandern hierbei nach „Münzwurf“. Man kann dazu ein Atom in eine kohärente Überlagerung zweier Quantenzustände bringen, indem man es mit Mikrowellenpulsen anregt. Nun bewegt sich ein solches Atom gleichzeitig in zwei Richtungen, sodass die Wellenfunktion des Atoms über mehrere Gitterplätze delokalisiert wird. Führt man jetzt eine Messung des Aufenthaltsorts durch, muss das Atom sich für einen der Gitterplätze entscheiden [1]. Bei der Messung wird die  $D_2$ -Linie<sup>2</sup> des Cäsiumatoms benutzt: man regt die Atome zum Fluoreszieren mit Laserlicht bei einer Wellenlänge von 852 nm an und das Fluoreszenzlicht wird über ein Mikroskop auf eine EMC-CD<sup>3</sup>-Kamera abgebildet.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Untersuchung der Atomfluoreszenzbilder, die im DQSIM - Experiment aufgenommen worden sind. Die Fluoreszenzmikroskopie bzgl. des zweidimensionalen Vielteilchensystems hat eine wichtige Bedeutung für das messungsbasierte Quantenrechnen mit Clusterzuständen [2]. Anhand der Fluoreszenzaufnahmen wird das Abbildungsprinzip erläutert, das Konzept der **Punktspreizfunktion** (*engl. point spread function, kurz PSF*) und der Faltung wird eingeführt und deren mathematische Eigenschaften werden vorgestellt. Durch die Analyse der PSF wird die reale **numerische Apertur** (*kurz NA*) zusammen mit dem **Strehl-Verhältnis** (*engl. Strehl ratio*) untersucht. Die Anwendung der **Zernike-Polynome** wird ebenso einen Einblick in die Analyse der optischen Aberrationen eines Abbildungssystems anbieten.

---

<sup>1</sup>Die beiden Hyperfeingrundzustände im Cäsiumatom bilden ein Pseudo-Spin-System und koppeln jeweils an unterschiedlichen Polarisationen der Dipolfalle. [3]

<sup>2</sup> $D_2$ -Linie des Cäsiumatoms:  $6^2S_{1/2} \rightarrow 6^2P_{3/2}$ , 852 nm [4].

<sup>3</sup>EMCCD: Abkürzung für das englische Wort „*electron multiplying charge-coupled device*“.

# 2 Die Theorie der Bildentstehung und die experimentelle Realisierung

## 2.1 Theorie der Bildentstehung

### 2.1.1 Die Punktspreadsfunktion (PSF)

Die PSF beschreibt, wie eine ideale punktförmige Lichtquelle durch ein System abgebildet würde. In der optischen Mikroskopie wird die Auflösung eines klassischen Mikroskops durch Beugung begrenzt, welche mit Hilfe der PSF bestimmt werden kann. Das Rayleigh-Kriterium ist ein objektives Maß zur Bestimmung dieses räumlichen Auflösungsvermögens. Es besagt, dass sich zwei punktförmige Lichtquellen, die nebeneinander in der Schärfeebene liegen, gerade noch unterscheiden lassen, wenn das Maximum des Beugungsmusters des einen Punktes in das erste Intensitätsminimum des Beugungsmusters des zweiten Punktes fällt [5]. Für ein aberrationsfreies optisches System mit einer kreisförmigen Blende kann das Beugungsmuster bzw. die PSF mathematisch durch eine Bessel-Funktion 1. Ordnung beschrieben werden [5, 6]:

$$I(\theta) = I_0 \left( \frac{2J_1(kr \sin \theta)}{kr \sin \theta} \right)^2 = I_0 \left( \frac{2J_1(x)}{x} \right)^2. \quad (2.1)$$

Die Intensitätsverteilung, die die Gleichung 2.1 beschreibt, wird auch als das Beugungsscheibchen (*engl. Airy disk*) bezeichnet. Hierbei ist  $I_0$  das Intensitätsmaximum des Beugungsmusters,  $J_1$  die Bessel-Funktion 1. Ordnung,  $k = 2\pi/\lambda$  die Wellenzahl,  $r$  der Radius der Apertur und  $\theta$  der Winkeldurchmesser des Randes des zentralen Beugungsscheibchens. Das erste Minimum des Beugungsmusters lässt sich durch Einsetzen der ersten Nullstelle der Bessel-Funktion  $x \approx 3,8317$  [8] berechnen zu:

$$\sin \theta \approx \frac{3,8317}{kr} = \frac{3,8317\lambda}{2\pi r} = 1,22 \frac{\lambda}{2r}. \quad (2.2)$$

Dazu definiert man die numerische Apertur [5]:

$$NA = n \cdot \sin \phi_{max}, \quad (2.3)$$

welche das Vermögen eines optischen Elements, Licht zu fokussieren, beschreibt und es gelten dazu  $\sin \phi_{max} = r/f$  und  $\lambda = \lambda_0/n$ , wobei  $n$  der Brechungsindex des Immersionsmediums,  $\lambda_0$  die Wellenlänge im Vakuum,  $\phi_{max}$  die Hälfte des maximalen Öffnungswinkels und  $f$  die Brennweite des Objektivs ist. So lässt sich die räumliche Auflösung durch Umformung der Gleichung 2.2 berechnet:

$$d_{Abbe} = f \cdot \sin \theta = f \cdot 0,61 \frac{\lambda}{r} = 0,61 \frac{\lambda_0}{NA}. \quad (2.4)$$

$d_{Abbe}$  wird auch als Abbe-Radius bezeichnet [6]. Eine simulierte Airy-Disk mit  $NA = 0,92$  und  $\lambda_0 = 852$  nm wird in der Abbildung 2.1 dargestellt.

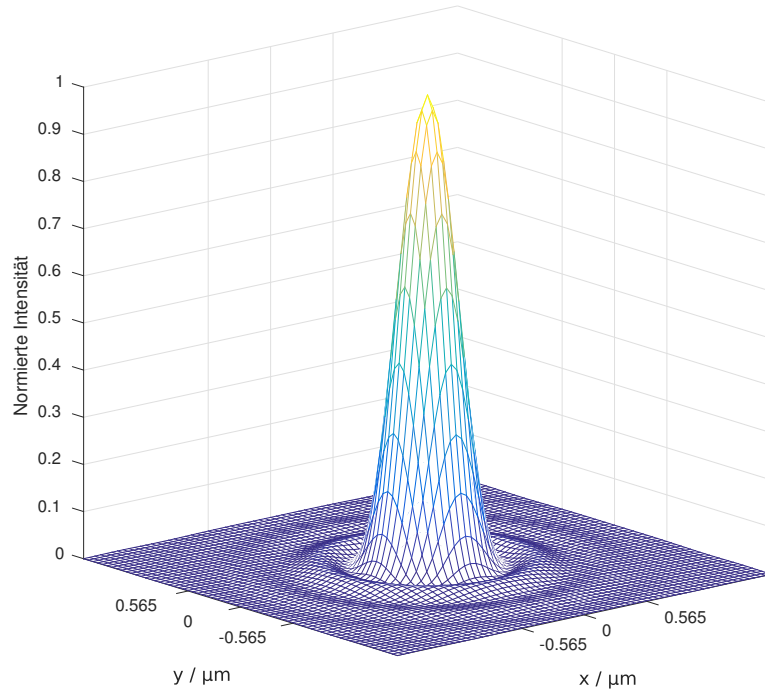


Abbildung 2.1: Eine mit *Matlab R2016a* simulierte Airy-Disk mit  $NA = 0,92$ ,  $\lambda_0 = 852$  nm.

## 2.1.2 Das Faltungsproblem

In unserem Experiment wird die  $D_2$ -Linie vom Cäsiumatom zur Abbildung verwendet und das Mikroskopobjektiv sollte eine numerische Apertur von  $0,92^1$  besitzen. Laut der Gleichung 2.4 beträgt der Abbe-Radius  $565$  nm im idealen Fall, während die Gitterkonstante  $612$  nm beträgt (siehe Abschnitt 2.2). Im idealen Fall könnten so zwei Atome, die als punktförmige Fluoreszenzquellen<sup>2</sup> betrachtet werden und sich in benachbarten Gitterplätzen befinden, gerade unterschieden werden. Jedoch treten im realen Fall häufig Fehler in Form von optischer Aberration oder eine effektiv kleinere NA auf, was zur Verbreiterung der PSF und somit zur Vergrößerung des Abbe-Radius führen würde. In unserem Experiment scheint dies der Fall zu sein (siehe Analyse der realen NA und der optischen Aberrationen in den Kapiteln 3 und 4). Es ist daher sinnvoll, die Aufnahmenentstehung des Fluoreszenzsignals von Atomen durch das Mikroskop auf den EMCCD-Detektor zu untersuchen.

Das Mikroskopobjektiv sammelt die Fluoreszenzphotonen der einzelnen Atome und bildet sie durch eine Tubuslinse auf dem EMCCD-Sensor ab. Der Sammelpunkt transformiert das Ursprungssignal  $O(x, y)$  aufgrund des Beugungs- bzw. Aberrationseffektes zu einer aufgeweiteten, unscharfen Verteilung  $I(x, y)$ . Man bezeichnet diesen Prozess als Faltung mit der PSF  $P(x, y)$  und beschreibt diesen mathematisch wie folgt [6]:

$$I(x, y) = (P * O)(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(x - u, y - v) O(u, v) du dv. \quad (2.5)$$

<sup>1</sup>Theoretischer Wert des Designs. Siehe [9].

<sup>2</sup> $R_{Cs-Atom} \approx 260$  pm =  $0,260$  nm [10].



### 2.1.3 Das diskrete Problem (Pixelung)

Der EMCCD-Sensor besteht aus einer Matrix lichtempfindlicher Fotodioden, die hinter einem Elektronenvervielfacher geschaltet sind. Diese verfügt über einen  $512 \times 512$  Pixel CCD-Chip mit einer Pixelfläche von jeweils  $16 \times 16 \mu\text{m}^2$ . Bei der Pixelung wird die Intensitätsverteilung  $I(x, y)$  aufgrund der endlichen Pixelgröße als diskrete digitale Verteilung  $I[x_i, y_j]$  aufgezeichnet, wobei  $x_i$  bzw.  $y_j$  ganzzahlige Position in der horizontalen bzw. vertikalen Richtung darstellt. Das diskrete Problem ist praktisch eine weitere Faltung mit der Pixelfunktion. Als Folge des Abtastes und der Digitalisierung werden Informationen verloren. Der Informationsverlust kann jedoch vermieden werden, indem man das „Nyquist-Shannon-Abtasttheorem“ beachtet und die Vergrößerung des optischen Systems so groß wählt, dass es gilt: Pixelgröße  $\ll$  Abbe-Radius [6].

### 2.1.4 Rauschen und Rauschquellen

Die zufällige und thermisch angeregte Bewegung der Elektronen im Schaltkreis (Johnson-Rauschen) sowie die Quantennatur der Photonen bzw. Elektronen (Schrotrauschen) führt auch zum Informationsverlust. Um das Signal kleiner Intensität überhaupt vom Rauschen zu unterscheiden, ist der Elektronenvervielfacher im EMCCD-Detektor besonders wichtig [11]. Dieser verstärkt die Elektronen aus dem Transferregister durch vielfache Stoßionisation im Halbleitermaterial (mit  $N$  Multiplikationsstufen). Eine angemessene Spannung wird dazu zwischen den Multiplikationsstufen angelegt. Somit erhält man einen mittleren Verstärkungsfaktor von  $M = (1 + p_{Sto\beta})^N$  ( $p_{Sto\beta}$  ist die Einzelwahrscheinlichkeit für eine Stoßionisation, für  $N = 536$ ,  $p_{Sto\beta} = 1,5\%$  gilt  $M \approx 2922$ ) [11]. Dieser Verstärkungsmechanismus der Photoelektronen ermöglicht die Detektion des Signals.

Das Rauschen muss in der Untersuchung der Intensitätsverteilung berücksichtigt werden. Wir nehmen an, dass sich dieses am Ende des Aufzeichnungsprozesses hinzuaddieren lassen kann [6]:

$$I[x_i, y_j] = (P * O)[x_i, y_j] + \epsilon[x_i, y_j]. \quad (2.6)$$

Weiterhin nehmen wir an, dass ein homogener Untergrund von der Intensitätsverteilung abgezogen werden kann, so dass der Mittelwert des Rauschens verschwindet [6]:

$$\langle \epsilon[x_i, y_j] \rangle = 0. \quad (2.7)$$

In unserem Experiment gibt es drei Klassen von dominanten Rauschenquellen [11]:

- Das **Schrotrauschen** aufgrund der Quantennatur der Photonen bzw. Elektronen tritt sowohl in der Optik und als auch in der Elektronik auf. Die stochastischen Fluktuationen in der Zahl der Photonelektronen sind poissonverteilt und somit ist die Standardabweichung proportional zur Wurzel der Signalintensität,  $\sigma_{Schrot} [x_i, y_j] \propto \sqrt{I[x_i, y_j]}$ .
- Als **Dunkelstrom** bezeichnet man die spontane Bildung der freien Ladungsträger durch thermische Effekte. Dieses erzeugt ein Signal ohne Belichtung (und daher die Bezeichnung „Dunkelstrom“) und ist ebenfalls poissonverteilt. Der Dunkelstrom kann durch Absenken der Betriebstemperatur verringert werden [6].
- Anstatt vom Signal hängt das Rauschen der Ausleseelektronik, das sog. **Ausleserauschen**, von den Spezifikationen der Elektronikbauteile (z.B. Ladungsverstärker, Analog-Digital-Umsetzer) ab. Dies kann durch Erhöhung des Verstärkungsfaktors unterdrückt werden [6].

## 2.2 Der experimentelle Aufbau

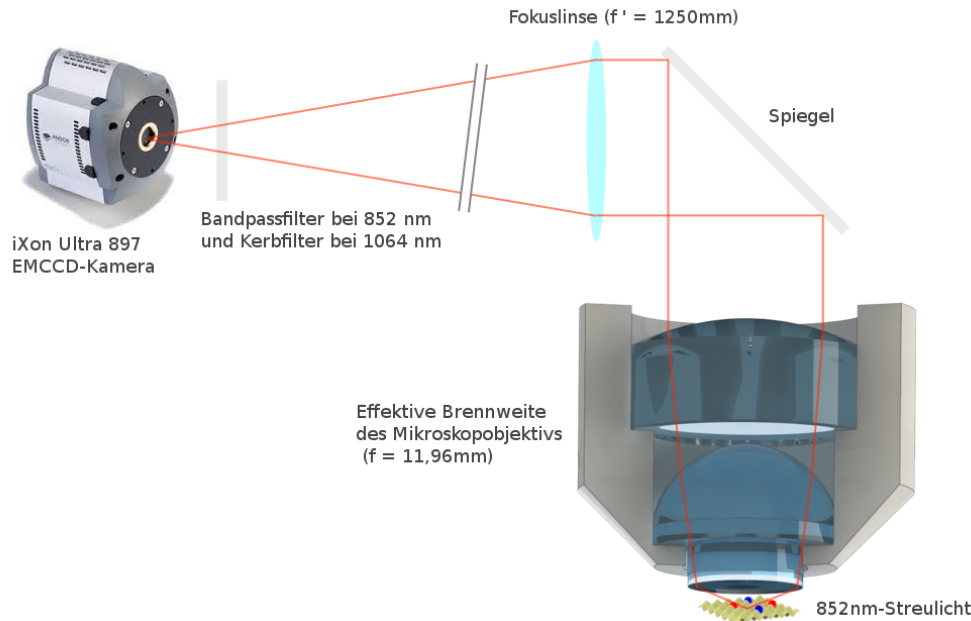


Abbildung 2.2: Der optische Aufbau: das Fluoreszenzlicht ( $D_2$ -Linie) von den im optischen Gitter eingefangenen Cäsiumatomen wird über ein Mikroskopobjektiv ( $f = 11,96 \text{ mm}$ ) und eine Fokulinse ( $f' = 1250 \text{ mm}$ ) auf den CCD-Chip einer iXon Ultra 897 EMCCD-Kamera abgebildet. Die Vergrößerung des Abbildungssystems  $f'/f$  beträgt ca. 104. Größe eines Pixels auf dem CCD-Chip beträgt  $16 \mu\text{m} \times 16 \mu\text{m}$ , entspricht einer Fläche von  $153,6 \text{ nm} \times 153,6 \text{ nm}$  in der Objektebene. Der Abstand zweier Gitterplätze entspricht etwa 4 Pixeln. Das Laserlicht mit Wellenlänge von 1064 nm bzw. 895 nm wird von dem Filter vor der EMCCD-Kamera herausgefiltert.

Die zunächst zu betrachtenden vorläufigen Fluoreszenzaufnahmen stammen von Cäsiumatomen in einem dreidimensionalen optischen Gitter, das durch die Interferenz von drei horizontalen Laserstrahlen ( $\lambda_{Dipol,H} = 866 \text{ nm}$ ) und einem zurückreflektierten Laserstrahl ( $\lambda_{Dipol,V} = 1064 \text{ nm}$ ) entsteht (Abbildung 2.3), der von unten vertikal zu den anderen verläuft und von einem Filter vor der Kamera herausgefiltert wird (Abbildung 2.2<sup>3</sup>).

Wir betrachten nun eine einzelne zweidimensionale Gitterebene. Die Gitterkonstante einer horizontalen Ebene lässt sich berechnen durch  $d = \lambda_{Dipol,H} / \sqrt{2} \approx 612 \text{ nm}$ . In dem optischen Gitter werden die Cäsiumatome in drei Raumdimensionen durch sechs - paarweise gegenläufige - Laserstrahlen ( $\lambda_{Melasse} = 852 \text{ nm}$ ) gekühlt und gefangen, wobei die Konfiguration der Laserstrahlen als „optische Melasse“ (engl. *optical molasses*)<sup>4</sup> bezeichnet wird. Die Atome sind zwar gekühlt, aber diffundieren geschwindigkeitsabhängig. Um die Atome an einem Platz zu halten, d.h. um eine ortsabhängige Kraft auf die Atome zu erzeugen, erweitert man dieses Verfahren, indem man vor der optischen Melasse eine Magneto-optischen Falle (kurz MOT) benutzt und die Atome vorkühlt. Prinzipiell fügt man ein mit dem Abstand zum Kühlbereich linear ansteigendes Magnetfeld hinzu und erzeugt aufgrund der Zeeman-Aufspaltung der Atomzustände, die proportional zum Magnetfeld ist, eine rückstellende Kraft durch zirkular polarisierte Laserstrahlen bei der Wellenlänge 852 nm.

<sup>3</sup>Die in diesem Abschnitt verwendeten Abbildungen 2.2, 2.3 und 2.4 von dem experimentellen Aufbau wurden von Dr. Geol Moon gezeichnet.

<sup>4</sup>Kenntnisse über die optische Melasse und MOT sind aus der Vorlesung des Themas „Laserkühlung“ von Prof. M. Köhl, Experimentalphysik 4, SS2015

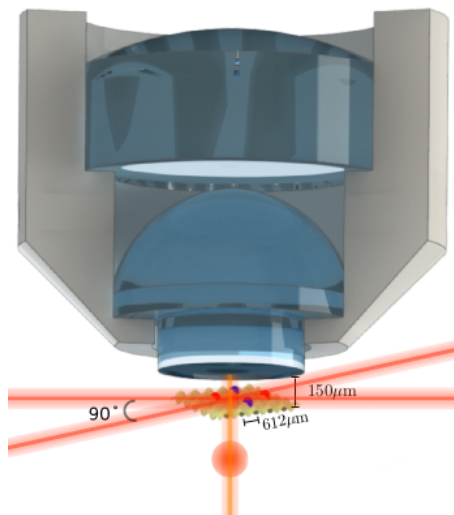
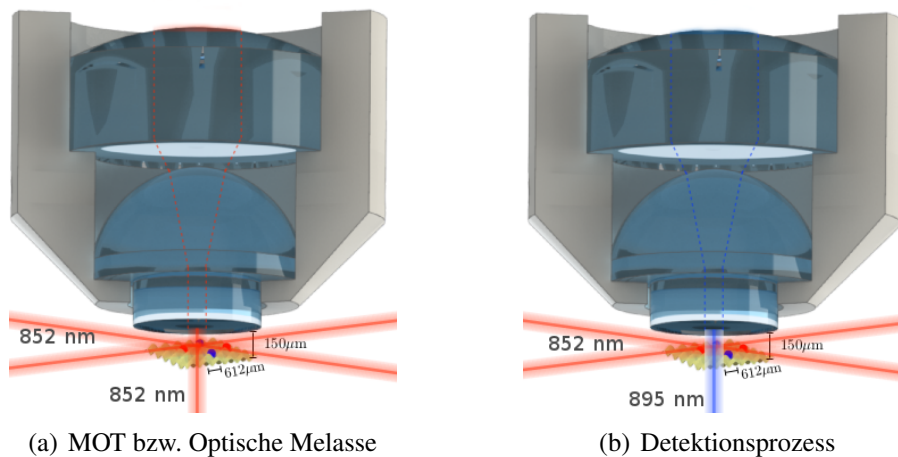


Abbildung 2.3: Das 3D optische Gitter entsteht durch die Interferenz von drei horizontalen bei  $\lambda=866$  nm und einem vertikalen bei  $\lambda=1064$  nm. Hier wird eine Gitterebene von mehreren dargestellt. Die Gitterkonstante beträgt 612 nm.

Erst nach dieser Vorkühlung werden die Cäsiumatome in das optische Gitter transferiert und die optische Melasse dort kühlt die Atome weiter ab und regt diese zum Fluoreszieren an (Abbildung 2.4 (a)). Um den Detektor vor direkter Laserbestrahlung zu schützen, wird beim Detektionsprozess die  $D_2$ -Linie in der vertikalen Richtung durch die  $D_1$ -Linie<sup>5</sup> ersetzt (Abbildung 2.4 (b)) und dieser 895 nm-Strahl wird auch von dem Filter vor der Kamera reflektiert (Abbildung 2.2), sodass letztendlich nur das 852 nm-Fluoreszenzlicht über ein beugungsbegrenzttes Mikroskop mit  $NA_{Theo} = 0,92$  auf einem CCD-Chip abgebildet wird. Die Belichtungszeit der EMCCD-Kamera beträgt 1 s.



(a) MOT bzw. Optische Melasse

(b) Detektionsprozess

Abbildung 2.4: Die MOT und die optische Melasse verwenden 852 nm-Laser. Die optische Melasse wird durch drei Paar gegenläufige 852 nm-Laserstrahlen erzeugt, siehe (a). Beim Detektionsprozess wird in der Vertikalrichtung das 852 nm-Lichtstrahl durch den 895 nm-Laserstrahl ersetzt (und vor der Kamera herausgefiltert), um die EMCCD-Detektor zu schützen, siehe (b).

<sup>5</sup> $D_1$ -Linie des Cäsiumatoms:  $6^2S_{1/2} \rightarrow 6^2P_{1/2}$ , 895 nm [4].

## 2.3 Fluoreszenzaufnahmen und Herausforderungen

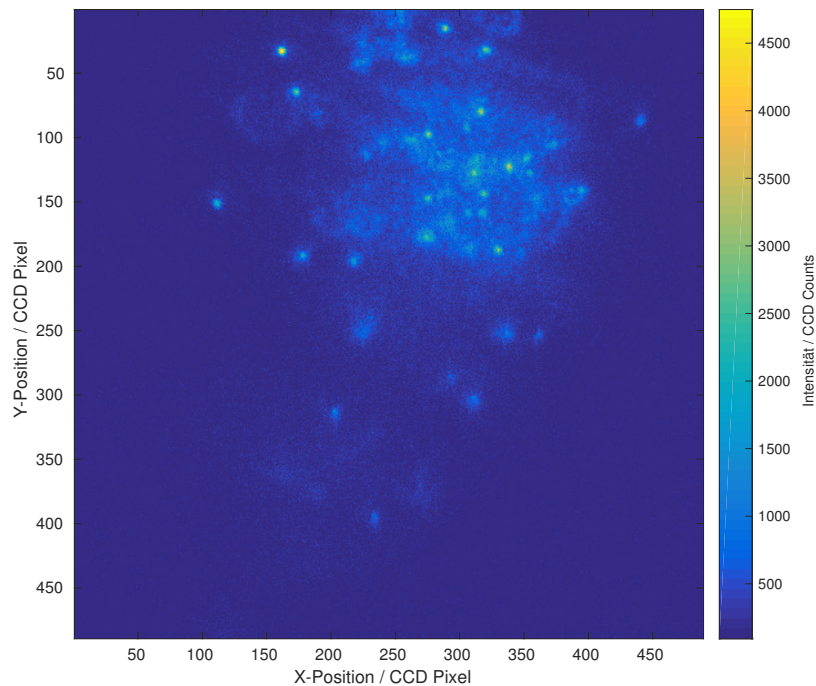


Abbildung 2.5: Darstellung einer typischen Fluoreszenzaufnahme mit *Matlab R2016a*.

Die Abbildung 2.5 zeigt eine typische Fluoreszenzaufnahme des Experiments. Das größte Problem bei diesen vorläufigen Aufnahmen liegt an den Störungssignalen der Out-of-Focus (OOF) Informationen, d.h. der Intensitätsbeitrag von Atomen, die nicht in der Brennebene liegen. Das im Abschnitt 2.2 beschriebene Lichtgitter ist dreidimensional, besteht aus mehreren parallel aufeinander liegenden zweidimensionalen optischen Gittern. Nachdem die Cäsiumatome auf das Gitter transferiert sind, sind diese in verschiedenen Ebenen gefangen worden.

Die Bestimmung der Atomposition erfordert es, die Fluoreszenzaufnahme zu entfalten und somit sind die genaue Kenntnisse der PSF notwendig. Die PSF kann man durch die sog. Bildregistrierung aus mehreren Aufnahmen (typisch einige Hundert) isolierter Atome rekonstruieren [6]. Die hier benutzten Atome sollten in der Brennebene und in der gleichen Position des Gitters liegen, denn wegen der optischen Aberrationen ist die PSF ortsabhängig. Mit den ca. 2000 vorläufigen Aufnahmen ist die Bildregistrierung ausgeschlossen, da aus diesen Bildern nur ca. 30 relativ scharfe und gut isolierte Atome herausgefiltert wurden, dabei sind sie in verschiedenen Positionen des Gitters.

Um den OOF-Intensitätsbeitrag zu entfernen, wird zur Zeit im Experiment eine Ebenenselektion implementiert, welche einen zusätzlichen Magnetfeldgradienten auf die Atome im Gitter anwendet, so dass schließlich nur die Atome in der gewünschten Ebene bleiben. Bevor dieser Schritt erfolgreich durchgeführt wird, kann man anhand der ausgewählten scharfen Einzelatome die PSF abschätzend untersuchen, die entsprechenden Größen analysieren und dabei den experimentellen Aufbau optimieren. In den folgenden Kapiteln werden zuerst die reale NA und das Strehl-Verhältnis mithilfe des Fourier-Filters und der Whittaker-Shannon-Interpolation für Einzelatome berechnet. Dann starten wir eine durch die Zernike-Polynome generierte Wellenfront-Abschätzung mit den vermuteten NA-Werten, um in die optischen Aberrationen des Systems einzublicken.

# 3 Untersuchung der realen NA und des Strehl-Verhältnisses

## 3.1 Vorbereitung

Die Analyse der NA erfolgt mit Hilfe eines selbstständig entwickelten Matlab-Skripts. Zuerst werden die Fluoreszenzaufnahmen einzeln abgerufen und der Einfluss des Etalon-Effektes vom CCD-Chip wird vor weiterer Analyse kompensiert. Es wird anschließend nach dem hellsten Atom im Bild gesucht, das sowohl scharf ist als auch einen klaren Untergrund besitzt, d.h. der potentielle Kandidat sollte möglichst in der Brennebene und isoliert sein. Der Mittelwert des Untergrundes des Einzelaatoms wird berechnet und von der Intensitätsverteilung abgezogen. Mit diesen Schritten habe ich ca.30 Atome ausgewählt, die die Grundlage der weiteren Analyse bilden.

## 3.2 Anwendung der Fourier-Optik

### 3.2.1 Abbe-Cutoff und Subpixel-Auflösung

Als erstes möchte ich die reale numerische Apertur untersuchen. Diese lässt sich berechnen durch den Abbe-Radius (siehe Gleichung 2.4), falls das System keine oder nur geringe optische Aberration und Rauschen aufweist. In der Praxis könnte die Information über den Abbe-Radius wegen des Rauschens und der Aberrationen oder wegen der Abtastung durch einzelne Pixeln verwaschen sein, so dass eine direkte Analyse in dem Ortsraum nicht möglich ist. Die Anwendung der Fourier-Optik bietet jedoch einen Zugang zu dieser Analyse. Die **optische Übertragungsfunktion** (*engl. optical transfer function, kurz OTF*) ist definiert als die Fourier-Transformierte von der PSF:

$$OTF(k_x, k_y) = \mathcal{FT} \{P(x, y)\}. \quad (3.1)$$

$k_i (i \in \{x, y\})$  ist die Ortsfrequenz im Fourier-Raum, der Kehrwert der räumlichen Periodenlänge. Die Analyse der NA basiert auf der Tatsache, dass die OTF eines optischen Systems mit einer harten Apertur eine Frequenz-Grenze (*engl. Abbe frequency, Abbe cutoff*) besitzt [6]:

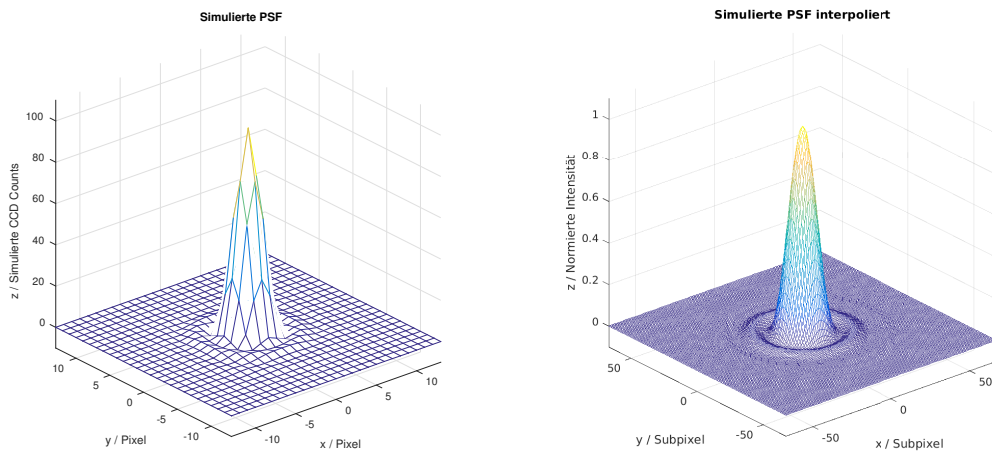
$$k_{Abbe} = \frac{1}{d_{Abbe}}. \quad (3.2)$$

Diese Grenze bietet eine direkte Methode an, die reale NA des optischen Systems zu extrahieren. Die Komponenten (Hochfrequenzrauschen) außerhalb der Abbe-Cutoff liefern keine physikalische Informationen über das optische Abbildungssystem und können entfernt werden - es handelt sich hier um eine Fourier-Filterung [6]. Da die OTF eine endliche Bandbreite besitzt, kann ich nun die Fluoreszenzverteilung mit einer beliebigen Ortsauflösung interpolieren, indem ich die Whittaker-Shannon-Interpolationsformel verwende [6]: ich erweitere die Verteilung im Fourier-Raum außer der Abbe-Cutoff so, dass die Anzahl der Punkte im Fourier-Raum bzgl. der originalen Anzahl um einen Faktor  $s^2$  (in jeder Dimension um  $s$ ) vergrößert wird. Das Anfügen von Nullen (*engl. zero-padding*) an den

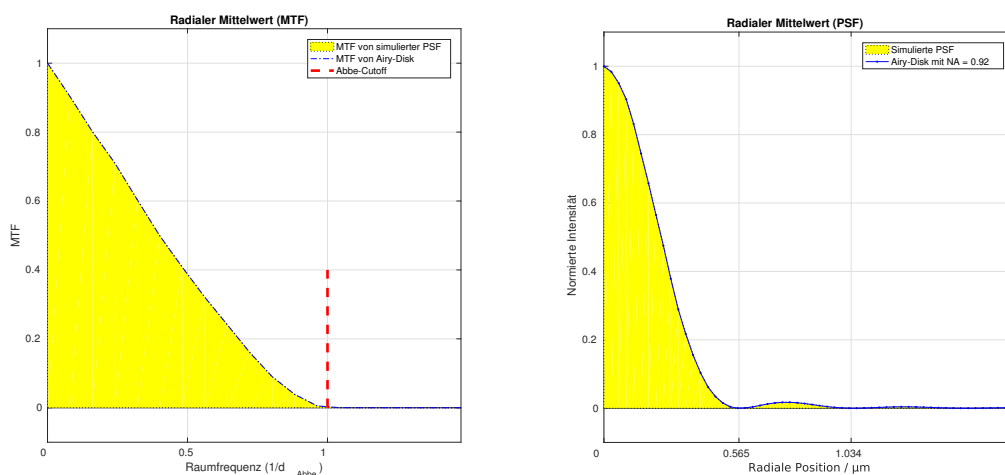
neuen Punkten führt nach einer inversen Fourier-Transformation zur nicht-abgetasteten Intensitätsverteilung: ich erhalte eine Subpixel-Auflösung von  $1/s^2$  der originalen Pixelgröße. Im folgenden werde ich anhand eines simulierten perfekten Atoms die Whittaker-Shannon-Interpolation betrachten.

### 3.2.2 Simulierte Atome ohne Aberrationen

Ich generiere zuerst eine perfekte Intensitätsverteilung eines Cäsiumatoms mit einer maximalen Intensität von 100 CCD Counts und einer NA von 0,92 unter der Annahme, dass das System keine Aberration und kein Rauschen aufweist (Abbildung 3.1 (a) links). Nachdem ich diese Verteilung mit einem Faktor  $s = 5$  interpoliert habe (Abbildung 3.1 (a) rechts), wird die interpolierte Verteilung zur Airy-Disk normiert (siehe Gleichungen 3.3 und 3.4). Der radiale Mittelwert [7] von der Intensitätsverteilung sowie von der theoretischen Airy-Disk wird berechnet und im rechten Bild der Abbildung 3.1 (b) dargestellt. Nach einer diskreten zweidimensionalen Fouriertransformation ist die **Modulationsübertragungsfunktion** (kurz *MTF*,  $MTF = |OTF|$ ) von der Verteilung sowie von der Airy-Disk erhältlich, deren radialer Mittelwert im linken Bild der Abbildung 3.1 (b) dargestellt ist.



(a) Intensitätsverteilung vor (links) und nach (rechts) der Interpolation

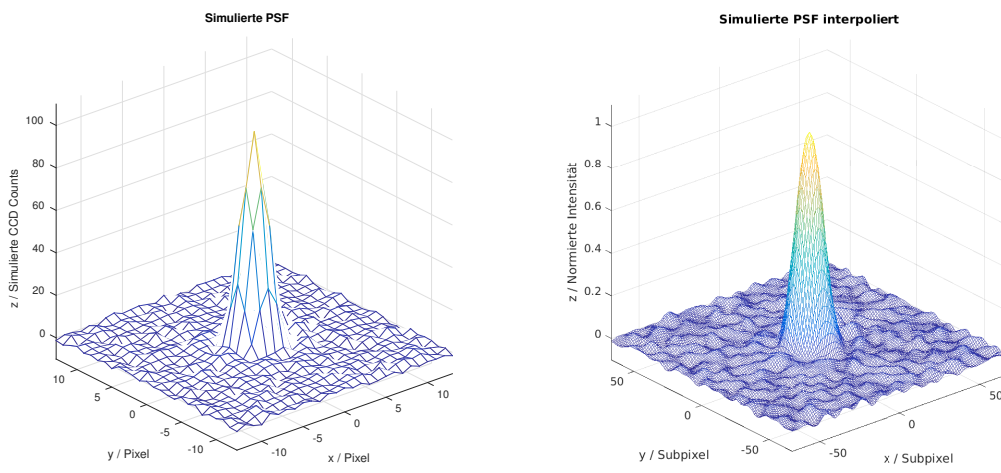


(b) Radialer Mittelwert der MTF (links) und der PSF (rechts)

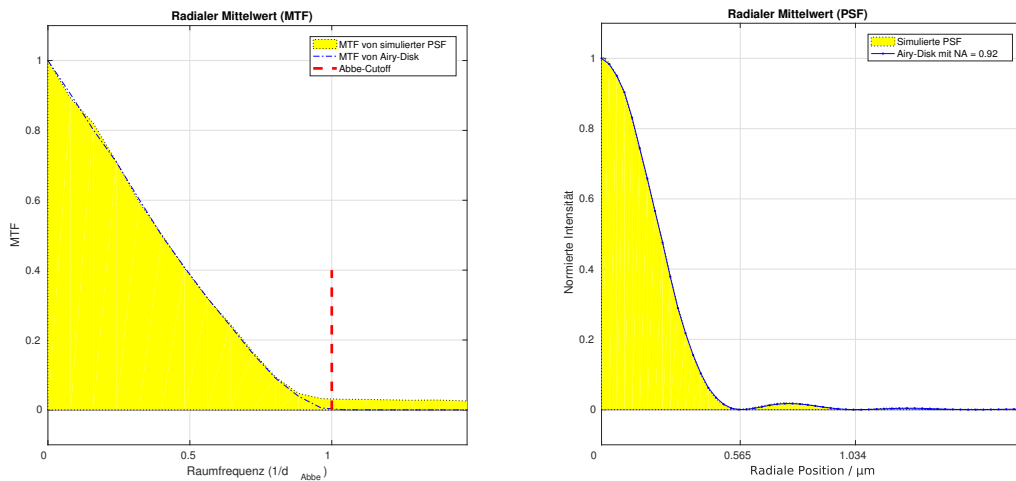
Abbildung 3.1: Ein simuliertes perfektes Atom ohne Rauschen und Aberrationen,  $NA = 0,92$ ,  $\lambda_{Fluo} = 852$  nm.

Dabei ist zu beachten, dass bei Abwesenheit von Aberrationen und Rauschen die generierte PSF identisch mit der theoretischen Airy-Disk ist. Im Fourier-Raum ist die MTF von der generierten PSF auch identisch mit der MTF von der Airy-Disk. Und man sieht direkt, dass die Ortsfrequenzen außerhalb der Abbe-Cutoff verschwinden.

Anschließend simuliere ich ein zweites Atom mit zusätzlichem Gauß'schem Rauschen ( $\sigma=1$ ), um zu lernen, in wie fern das Rauschen die PSF bzw. die MTF beeinflusst (Abbildung 3.2 (a)). Die Abbildung 3.2 (b) zeigt eindeutig, dass das Rauschen mit einem verschwindenden Mittelwert die radial gemittelte PSF kaum beeinflusst und tritt im Fourier-Raum als Hochfrequenzkomponenten auf, die bei der späteren Analyse einzelner Atomfluoreszenzaufnahmen entfernt werden können.



(a) Intensitätsverteilung mit Gauß'schem Rauschen ( $\sigma = 1$ ) vor und nach der Interpolation



(b) Radialer Mittelwert der MTF und der PSF

Abbildung 3.2: Ein simuliertes Atom mit Gauß'schem Rauschen und ohne Aberrationen,  $NA = 0,92$ ,  $\lambda_{Fluo} = 852$  nm.

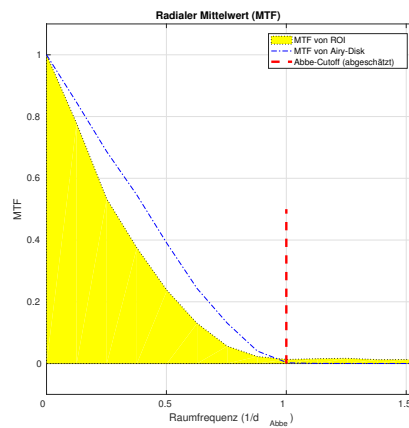
### 3.3 Abschätzung der realen NA und des Strehl-Verhältnisses

Nach der Simulation werden nun der Fourier-Filter und die Whittaker-Shannon-Interpolation auf den ausgewählten Atomen angewendet. Zunächst wird die reale NA im Fourier-Raum abgeschätzt (Abbildung 3.3 (a)). Mit der erworbenen NA kann die OTF nun Fouriergefiltert (typisch  $k_{Abbe} > 1,2/d_{Abbe}$  [6]) werden, um das Hochfrequenzrauschen auszufiltern (Abbildung 3.3 (b) links, angezeigt wird der radiale Mittelwert der MTF). Nach der Interpolation wird die gefilterte Intensitätsverteilung  $I_{Mess} [x_i, y_j]$  zu der idealen Airy-Disk mit gleicher NA durch die folgende Formel normiert [9]:

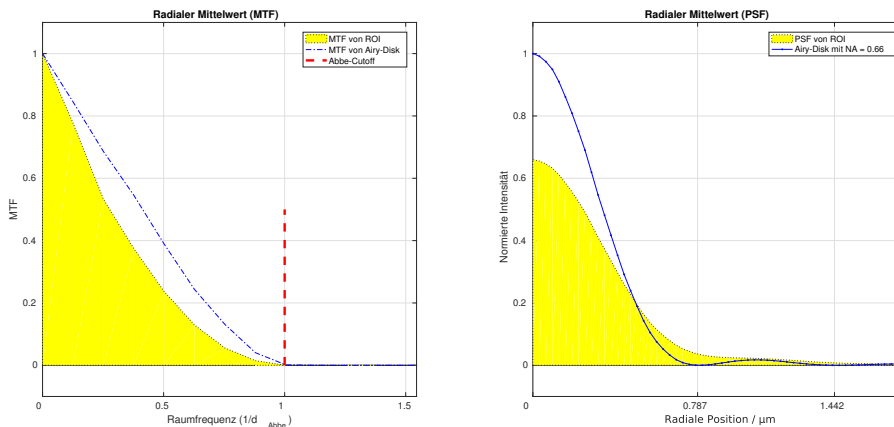
$$I_{Norm} [x_i, y_j] = I_{Mess} [x_i, y_j] \cdot C_{Norm} , \quad (3.3)$$

$$\text{mit } C_{Norm} = \frac{\sum_{i,j} \text{Airy} [x_i, y_j]}{\sum_{i,j} I_{Mess} [x_i, y_j]} , \quad (3.4)$$

damit das Strehl-Verhältnis<sup>1</sup> ermittelt werden kann. Dabei habe ich angenommen, dass die interpolierte Intensitätsverteilung rotationssymmetrisch sei, und ich berechne das Strehl-Verhältnis direkt durch das Maximum (Abbildung 3.3 (b) rechts).



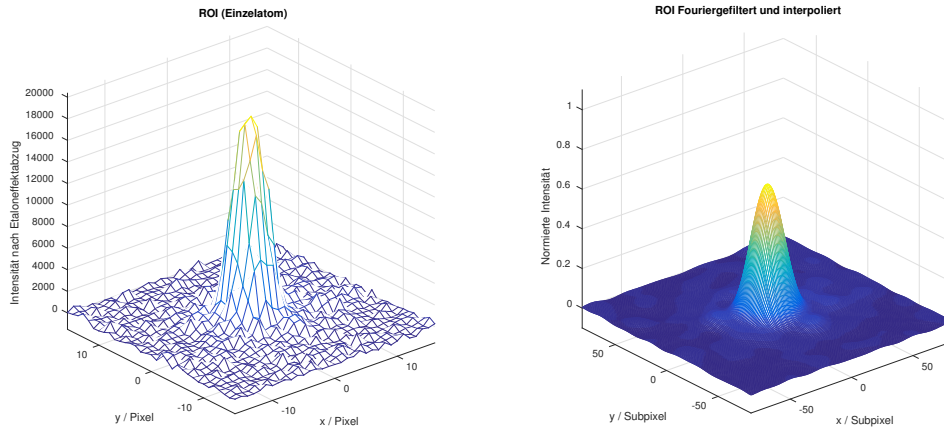
(a) Abschätzung der realen NA im  $k$ -Raum



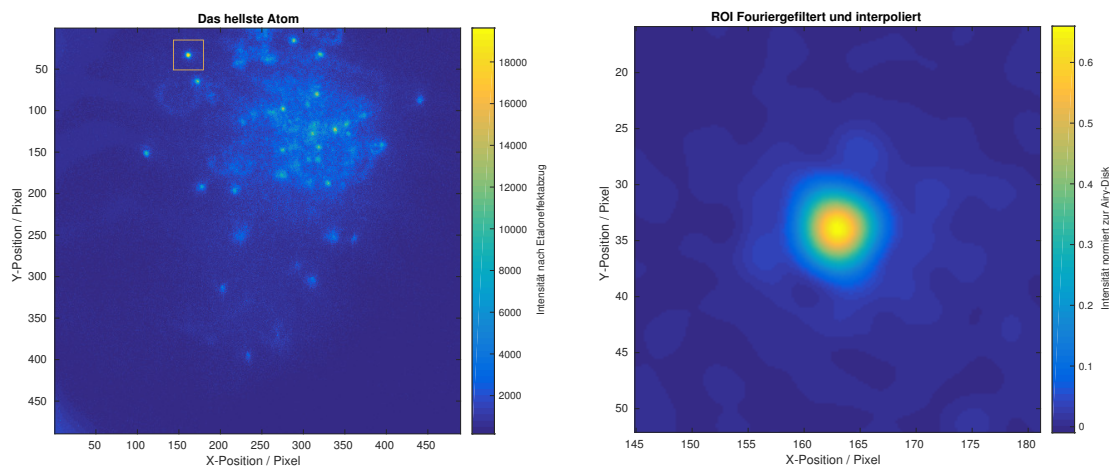
(b) Die Fourier-Filterung mit der abgeschätzten NA (links) und die Interpolation (rechts)

<sup>1</sup>Ein Maß für die Auflösungsqualität von optischen Instrumenten. Sie ist definiert als das Verhältnis der gemessenen maximalen Intensität einer Punktquelle zur theoretischen maximalen Intensität des perfekten Beugungsmusters und hat einen Wert zwischen 0 und 1 je nach auftretenden Aberrationen [9].





(c) 3D-Atomfluoreszenz vor (links) bzw. nach (rechts) der Fourier-Filterung und Interpolation



(d) 2D-Atomfluoreszenz vor (links) bzw. nach (rechts) der Analyse

Abbildung 3.3: Fourier-Filterung und Whittaker-Shannon-Interpolation auf dem Einzelatom

Die gleichen Schritte führe ich nun bei allen ausgewählten Atomen durch und ich erhalte nach einer Mittelung die Abschätzung für die numerische Apertur und das Strehl-Verhältnis des Systems:

$$NA = 0,6439 \pm 0,0061, \quad \eta_{Strehl} = 0,6736 \pm 0,0095.$$

Die tatsächliche NA hat nur ca. 70% des theoretischen Wertes  $0,92^2$  vom Design erreicht. Diese Abweichung könnte daraus resultieren, dass der Lichtstrahl nach dem Objektiv durch weitere Blenden blockiert wurde. Das ermittelte Strehl-Verhältnis hat ebenso nur ca. 67% des theoretischen Maximums 1 erreicht und ich erhalte eine offensichtliche Abweichung der Fluoreszenzverteilung von einer idealen Airy-Disk im Fourier-Raum bzw. im Ortsraum (Abbildung 3.3 (b)), was starke Aberrationen impliziert. Diese Abweichung hat sich aus der Wellenfront-Deformation entwickelt, die von den optischen Aberrationen des Systems hervorgerufen worden ist [6]. Und diese werden in dem folgenden Kapitel genauer betrachtet.

<sup>2</sup>Die in [9] gemessene NA beträgt  $0,91 \pm 0,05$  bzw.  $0,91 \pm 0,08$  durch zwei verschiedene Methoden.

# 4 Analyse der optischen Aberrationen

## 4.1 Zernike-Polynome und Wellenfront-Deformation

Mathematisch ist die PSF als das Betragsquadrats der Fourier-Transformierten von dem **elektrischen Feld**  $E(x, y)$  an der Apertur definiert (Fraunhofer'sche Beugung) [6]:

$$P(x, y) = |\mathcal{FT}\{E(x, y)\}|^2. \quad (4.1)$$

Die Phase des elektrischen Feld an der Apertur wird durch die Wellenfront  $W(x, y)$  beschrieben [12]:

$$E(x, y) \propto p(x, y) = p_0 e^{-i2\pi W(x, y)}. \quad (4.2)$$

$p(x, y)$  hier ist die **Aperturfunktion** (engl. *pupil function*), wobei  $p_0$  gleich 1 innerhalb und 0 außerhalb der Apertur<sup>1</sup> ist. Die Informationen über optischen Aberrationen sind in der Wellenfront enthalten und die Wellenfront lässt sich in Basis der Zernike-Polynome<sup>2</sup>  $Z_n^m(\rho, \phi)$  ausdrücken<sup>3</sup>:

$$W(\rho, \phi) = \sum_n \sum_{m=-n}^n c_{nm} Z_n^m(\rho, \phi). \quad (4.3)$$

Die Zernike-Polynome sind auf dem Einheitskreis definierte orthogonale Funktionen:

$$Z_n^m(\rho, \phi) = N_n^m R_n^{|m|}(\rho) \cdot \begin{cases} \cos(m\phi) & \text{für } m > 0, \\ \sin(m\phi) & \text{für } m < 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Hierbei ist  $\rho \in [0, 1]$  der normierte radiale Abstand und  $\phi \in [0, 2\pi]$  der azimutale Winkel.  $n$  ist die radiale Ordnung und  $m$  ist die Winkelfrequenz. Beide sind ganze Zahlen und es gilt:  $n \geq 0$  und  $-n \leq m \leq n$ . Die radialen Funktionen hängen nicht vom Vorzeichen der Winkelfrequenz ab und sind angegeben durch:

$$R_n^{|m|}(\rho) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\frac{n-|m|}{2}} \frac{(-1)^k (n-k)!}{k! \left(\frac{n+|m|}{2} - k\right)! \left(\frac{n-|m|}{2} - k\right)!} \rho^{n-2k} & \text{für } (n - |m|) \text{ gerade,} \\ 0 & \text{für } (n - |m|) \text{ ungerade.} \end{cases} \quad (4.5)$$

Häufig werden die Zernike-Polynome mit dem Normierungsfaktor

$$N_n^m = \sqrt{\frac{2(n+1)}{1 + \delta_{m0}}} \quad (4.6)$$

<sup>1</sup>Man normiert die Apertur zum Einheitskreis mit einer Fläche von  $\pi$  [12].

<sup>2</sup>Benannt nach dem niederländischen Physiker und Nobelpreisträger Frits Zernike, sind häufig im Polarkoordinatensystem definiert.

<sup>3</sup>Die Gleichungen 4.3 - 4.9 befinden sich in [12] und [13].

normiert, so dass es glit

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} Z_n^m(\rho, \phi) \cdot Z_{n'}^{m'*}(\rho, \phi) d\phi r dr = \pi \delta_{nn'} \delta_{mm'} . \quad (4.7)$$

Der Zusammenhang zwischen den Zernike-Polynomen und der Wellenfront-Deformation bietet einen Zugang zur Analyse der Aberrationen. Die ersten 13 Zernike-Polynome in Polar- bzw. kartesischem Koordinatensystem sowie die entsprechenden klassischen Bezeichnungen für die optischen Aberrationen sind im Anhang zu finden, wobei man darauf achten sollte, dass „Piston“ und „Tilt“ (die ersten 3 Terme) keine echten optischen Aberrationen sind: sie verschieben lediglich die PSF im Ortsraum. Die Wellenfront-Deformation lässt sich durch das Quadratische Mittel (*engl. root-mean-square, kurz RMS*) in Einheit der Wellenlänge ausdrücken:

$$W_{RMS} = \sqrt{\frac{\int \int W(x, y)^2 dx dy}{\pi}} . \quad (4.8)$$

Die Orthogonalität der Zernike-Polynome (siehe Gleichungen 4.3 und 4.7) führt zu einer Vereinfachung der Gleichung 4.8:

$$W_{RMS} = \sqrt{\frac{\sum_{n,m} c_{nm}^2 \cdot \pi}{\pi}} = \sqrt{\sum_{n,m} c_{nm}^2} , \quad (4.9)$$

wobei  $n \geq 2$  ist. Generiert man eine PSF mit geeigneten Anfangswerten der Zernike-Koeffizienten  $c_{nm}$  (Gleichungen 4.1, 4.2 und 4.3) und passt man diese an die gemessene PSF an, so kann man durch einen iterativen Algorithmus die Zernike-Koeffizienten der gemessenen PSF bestimmen. Dies bietet die Möglichkeit für eine quantitative Analyse verschiedener optischer Aberrationen an. Für ein ideales System ohne optische Aberration gilt  $W_{RMS} = 0$  und dies habe ich anhand einer generierten perfekten Airy-Disk bestätigt.

## 4.2 Untersuchung der Aberrationen des Systems

In einer wissenschaftlichen Analyse von optischen Aberrationen eines Systems muss zuerst die PSF durch eine Bildregistrierung rekonstruiert werden. Dafür sind zahlreiche Fluoreszenzaufnahmen von dem selben Atom auf der Brennebene notwendig, um zu vermeiden, dass ungeordnetes Rauschen und ortsabhängiges nicht-lineares Verhalten die wichtigen Eigenschaften der PSF verwaschen, vor allem die Aberrationen höherer Ordnungen. Mit der geringen Anzahl der ausgewählten Atome ist eine präzise, ortsaufgelöste Analyse ausgeschlossen. Jedoch kann ich grob abschätzen, welche Aberration(en) einen dominanten Effekt auf das System ausüben könnte(n). Ich erwarte eine relativ starke Defokussierung ( $n = 2, m = 0$ ), weil die Atome nicht alle an der Brennebene sind.

Zuerst werden die generierten PSF (Gleichungen 4.1, 4.2 und 4.3) an einzelnen Atomen separat angepasst und nun erlaubt die Zernike-Methode es, nach dem tatsächlichen Zentrum der interpolierten Intensitätsverteilung zu suchen. Dabei habe ich das im leztzten Kapitel berechnete Ergebnis für NA als Anfangswert des Fit-Parameters benutzt. Ich habe alle interpolierten Intensitätsverteilungen überlappt, wobei alle Zentren aufeinander liegen. Die neue Verteilung (geteilt durch die Atomzahl) ergibt den Mittelwert der gemessenen PSF (siehe Abbildung 4.1) und lässt sich nun nochmal durch die mit den Zernike-Koeffizienten generierte PSF anpassen. Die Fit-Ergebnisse sind in der Tabelle 4.1 dargestellt.

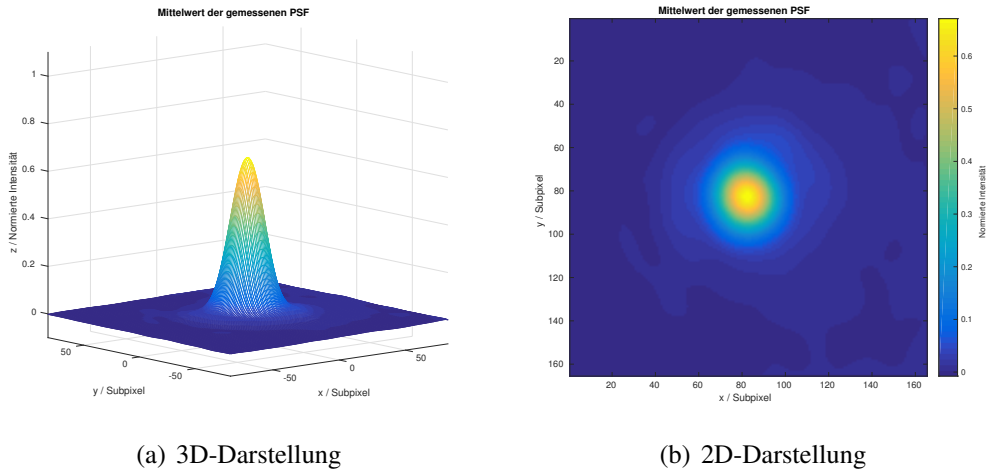


Abbildung 4.1: Die gemittelte Intensitätsverteilung für die ausgewählten Atomfluoreszenzaufnahmen

Die nicht-lineare Kleinst-Fehlerquadrat-Schätzung<sup>4</sup> zeigt, dass die Defokussierung einen dominanten Effekt auf dem System hat und das entspricht meiner vorherigen Erwartung. Außer Defokussierung zeigt die sphärische Aberration auch einen auffälligen Einfluss auf das System. Um sicherzustellen, ob das ein Artefakt aus dem Algorithmus ist, der daher kommt, dass ich verschiedene Atome aus verschiedenen Stellen gemittelt habe und dadurch Aberrationen gemittelt wurden, die dann so aussehen als wären sie sphärisch, habe ich die Fit-Ergebnisse für einzelnen Atome berücksichtigt. Auch für die einzelnen Atome hat der Algorithmus sphärische Aberration gleichen Vorzeichen und gleicher Größenordnung aufgewiesen (Mittelwert in der Tabelle 4.2 dargestellt). Der verbleibende Effekt könnte daraus resultieren, dass das Objektiv und die Fokuslinse nicht im exakt richtigen Abstand stehen. Jedoch kann dieser Abstand erst einjustiert werden, nachdem eine einzelne Gitterebene selektiert worden ist.

Im Gegensatz zur Defokussierung und sphärischen Aberration sind Astigmatismus, Koma und Kleeblattfehler solche optische Aberrationen, die sehr leicht beeinflussbar von der Position des Sehfeldes sind und sich leicht verwaschen lassen, wie es in dieser Analyse der Fall ist. Um diese Aberrationen genauer zu betrachten, sind mehr Statistiken bzw. mehr Fluoreszenzaufnahmen von Atomen in einer festen Position notwendig. In dieser Arbeit wurde deswegen nur die Methode der Aberrationsanalyse vorgestellt.

Tabelle 4.1: Ergebnis der Wellenfront-Schätzung der gemittelten PSF, ausgedrückt in Terme der ersten 10 aberrationsbehafteten Zernike-Polynome. Die vollständigen Bezeichnungen der Aberrationen sind im Anhang angegeben.

|                 | Defocus   | 1.AstV    | 1.AstO    | ComaV     | ComaH     | TreV      | TreO      | Sph       | 2.AstV    | 2.AstO    |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Ordnung (n,m)   | (2,0)     | (2,2)     | (2,-2)    | (3,-1)    | (3,1)     | (3,-3)    | (3,3)     | (4,0)     | (4,,2)    | (4,-2)    |
| RMS / $\lambda$ | +0,101(1) | -0,008(5) | +0,003(4) | +0,000(1) | -0,004(7) | -0,000(4) | +0,004(0) | +0,026(9) | -0,008(0) | +0,007(0) |

Tabelle 4.2: Schätzung der sphärischen Aberration (4,0)

|                 | Mittelwert der Einzelschätzungen | Schätzung anhand der gemittelten PSF |
|-----------------|----------------------------------|--------------------------------------|
| RMS / $\lambda$ | +0,027(6)                        | +0,026(9)                            |

<sup>4</sup>Das Matlab-Skript der Zernike-Methode wurde von Stefan Brakhane und Carsten Robens entwickelt.

## 5 Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit habe ich mich mit der heuristischen Untersuchung der unbekanntenen PSF des abbildenden Systems im DQSIM-Experiment in Anwesenheit des Rauschens und der optischen Aberrationen beschäftigt. Nachdem es festgestellt wurde, dass wegen des dominanten Rauschens der Out-of-Focus-Information die Rekonstruktion von PSF durch eine Bildregistrierung schwierig ist, wurden die einzelnen Fluoreszenzaufnahmen von den hellsten (schärfsten) und am besten isolierten Atomen zur weiteren Analyse ausgewählt.

Die Abschätzung der realen NA basiert auf der Tatsache, dass die Komponenten der Ortsfrequenz außerhalb der Abbe-Cutoff  $1/k_{Abbe}$  keine physikalische Information liefern. In dem Fourier-Raum wurde nach dieser entscheidenden Grenze gesucht, damit die reale NA daraus extrahiert werden konnte. Weiter sollten die Komponenten außer dieser Grenze zur Null gesetzt werden, um Hochfrequenzrauschen der Intensitätsverteilung des Atoms zu entfernen. Für weitere Untersuchungen ist eine Subpixel-Auflösung notwendig. Diese wurde realisiert, indem man das Whittaker-Shannon-Interpolationstheorem benutzt. Die interpolierte Intensitätsverteilung wurde zu einer idealen Airy-Disk normiert und das Strehl-Verhältnis wurde mittels des Maximums der Verteilung erworben unter der Annahme, dass die interpolierte Verteilung rotationssymmetrisch ist. Führt man diese Schritte bei allen Atomen durch, erhält man die erste Abschätzung für die numerische Apertur bzw. das Strehl-Verhältnis, die das Vermögen des optischen Systems, Licht zu fokussieren bzw. Objekte aufzulösen, beschreibt.

Die abgeschätzte NA bzw. das Strehl-Verhältnis hat eine auffällige Abweichung von dem theoretischen Wert des Designs gezeigt, was darauf hinweist, dass der experimentelle Aufbau weiter optimiert werden sollte. Die Abweichung der gemessenen Intensitätsverteilung im Ortsraum sowie im Fourier-Raum impliziert, dass das abbildende System optische Aberrationen aufweisen müsste. Der Zusammenhang zwischen der Wellenfront und der PSF bietet uns dabei die Möglichkeit, die optischen Aberrationen zu analysieren. Die Wellenfront lässt sich in Termen von Zernike-Polynomen entwickeln. Wir haben eine PSF mithilfe der Zernike-Polynome niedriger Ordnungen (von Defokussierung bis Astigmatismus 2. Ordnung) generiert und an die gemittelten Messdaten angepasst, damit wir durch die abgeschätzten Zernike-Koeffizienten in die entsprechenden Aberrationen einblicken können. Wegen geringer Statistik wurden die optischen Aberrationen, vor allem diejenigen, die von der Position des Sehfeldes abhängig sind, verwaschen. Jedoch hat die Defokussierung einen dominanten Effekt aufgewiesen, der der Tatsache entspricht, dass die Atome nicht alle in der Brennebene liegen. Desweiteren resultiert die zurückbleibende sphärische Aberration möglicherweise aus dem noch zu einjustierenden Abstand zwischen dem Objektiv und der Fokuslinse.

# 6 Anhang

## Die ersten 13 Zernike-Polynome

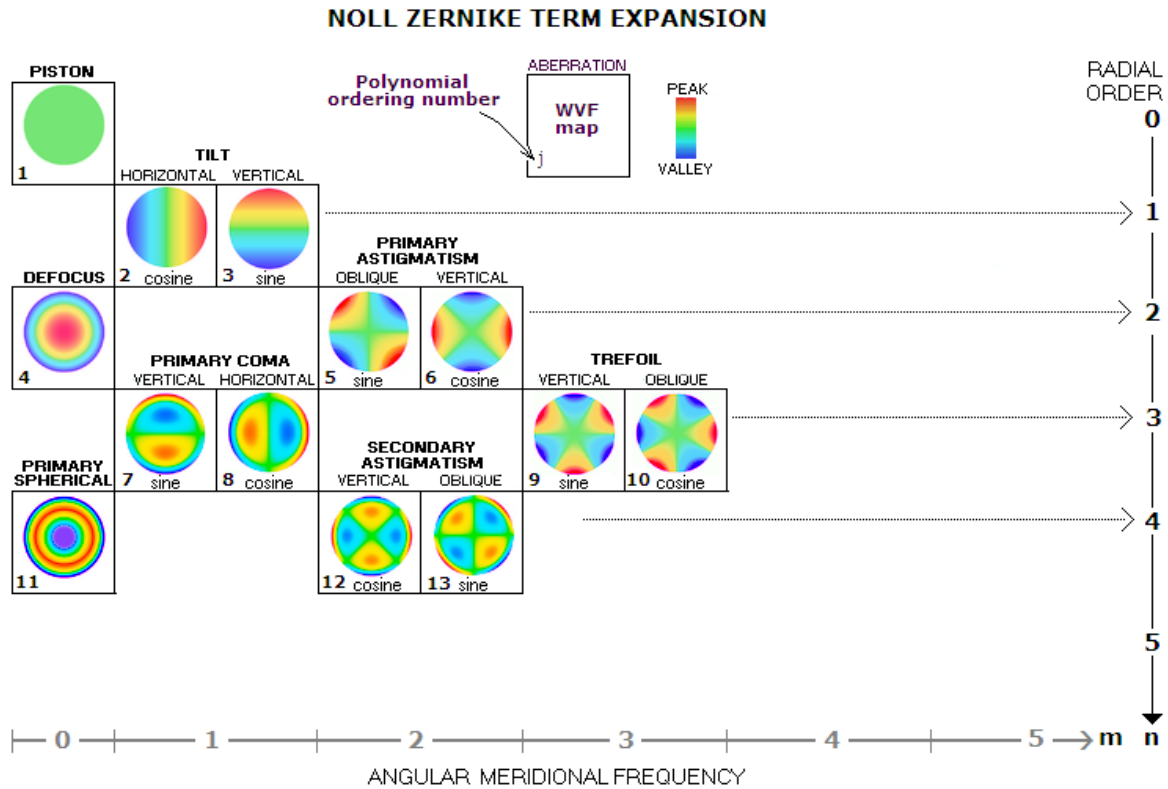


Abbildung 6.1: Schematische Darstellung der ersten 13 Zernike-Polynome mit Noll'schen Indizes [14]

Tabelle 6.1: Die ersten 13 Zernike-Polynome in Polar- und kartesischem Koordinatensystemen und ihre klassischen Bezeichnungen der optischen Aberrationen [13]

| Noll-Index $j$ | Radiale Ordnung $n$ | Winkel-frequenz $m$ | $Z_n^m(\rho, \phi)$                       | $Z_n^m(x, y)$                                 | Klassischer Name            |
|----------------|---------------------|---------------------|---|---|-----------------------------|
| 1              | 0                   | 0                   | 1   | 1   | Piston                      |
| 2              | 1                   | 1                   | $2\rho \cos \phi$                         | $2x$  | X-Tilt/Kippen               |
| 3              | 1                   | -1                  | $2\rho \sin \phi$                         | $2y$  | Y-Tilt/Kippen               |
| 4              | 2                   | 0                   | $\sqrt{3}(\rho^2 - 1)$                    | $\sqrt{3}(2x^2 + y^2 - 1)$                    | Defokussierung              |
| 5              | 2                   | -2                  | $\sqrt{6}\rho^2 \sin 2\phi$               | $\sqrt{6} \cdot 2xy$                          | 1. Astigmatismus (quer)     |
| 6              | 2                   | 2                   | $\sqrt{6}\rho^2 \cos 2\phi$               | $\sqrt{6}(x^2 - y^2)$                         | 1. Astigmatismus (vertikal) |
| 7              | 3                   | -1                  | $\sqrt{8}(3\rho^3 - 2\rho) \sin \phi$     | $\sqrt{8}(3y^3 + 3x^2y - 2y)$                 | Koma (vertikal)             |
| 8              | 3                   | 1                   | $\sqrt{8}(3\rho^3 - 2\rho) \cos \phi$     | $\sqrt{8}(3x^3 + 3xy^2 - 2x)$                 | Koma (horizontal)           |
| 9              | 3                   | -3                  | $\sqrt{8}\rho^3 \sin 3\phi$               | $\sqrt{8}(3x^2y - y^3)$                       | Kleeblattfehler (vertikal)  |
| 10             | 3                   | 3                   | $\sqrt{8}\rho^3 \cos 3\phi$               | $\sqrt{8}(x^3 - 3xy^2)$                       | Kleeblattfehler (quer)      |
| 11             | 4                   | 0                   | $\sqrt{5}(6\rho^4 - 6\rho^2 + 1)$         | $\sqrt{5}(6(x^2 + y^2)^2 - 6(x^2 + y^2) + 1)$ | Sphärische Aberration       |
| 12             | 4                   | 2                   | $\sqrt{10}(4\rho^4 - 3\rho^2) \cos 2\phi$ | $\sqrt{10}(4x^4 - 4y^4 - 3x^2 + 3y^2)$        | 2. Astigmatismus (vertikal) |
| 13             | 4                   | -2                  | $\sqrt{10}(4\rho^4 - 3\rho^2) \sin 2\phi$ | $\sqrt{10}(8x^3y + 8xy^3 - 6xy)$              | 2. Astigmatismus (quer)     |

# Literaturverzeichnis

- [1] *Münzwurf im Mikrokosmos*, Pressemitteilung der Uni Bonn (09.07.2009).  
<https://www.uni-bonn.de/Pressemitteilungen/205-2009>  
Abgerufen am 27.07.2016.
- [2] *2D Discrete Quantum Simulator*, Forschungsprofil der Uni Bonn.  
<https://www.uni-bonn.de/forschung/startseite-forschung/erc-grants/dqsim>  
Abgerufen am: 10.07.2016.
- [3] M. Karski et al., *Quantum Walk in Position Space with Single Optically Trapped Atoms*, Science 325, p.174 (2009)
- [4] D. A. Steck, *Cesium D Line Data*, Los Alamos, 2003.  
<http://steck.us/alkalidata/cesiumnumbers.1.6.pdf>  
Abgerufen am: 27.07.2016.
- [5] W. Demtröder, *Experimentalphysik 2: Elektrizität und Optik, 6. Auflage*, Springer-Lehrbuch. Springer. ISBN: 978-3-642-29943-8.
- [6] A. Alberti et al., *Super-resolution microscopy of single atoms in optical lattices*, New J. Phys. 18, 053010 (2016).
- [7] D. J. Fischer, *radialavg.m*, Matlab-Funktion für Bestimmung des radialen Mittelwertes, 2014.  
<http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/46468-radialavg-zip/content/radialavg.m>  
Abgerufen am: 09.06.2016.
- [8] K W. Kark, *Antennen und Strahlungsfelder*, Springer. ISBN 978-3-658-03616-4.
- [9] F. Kleißler, *Assembly and Characterization of a High Numerical Aperture Microscope for Single Atoms*, Masterarbeit, Bonn, 2014.
- [10] *Caesium: radii of atoms and ions*,  
[https://www.webelements.com/caesium/atom\\_sizes.html](https://www.webelements.com/caesium/atom_sizes.html).  
Abgerufen am 27.07.2016.
- [11] J. Zopes, *Einzelplatz-Detektion im optischen Gitter unterhalb des Beugungslimits*, Bachelorarbeit, Bonn, 2012.
- [12] L. Lundström, *Wavefront Aberrations and Peripheral Vision*, Doktorarbeit, Stockholm, 2007.
- [13] Prof. Dr. J. Schwiegerling, *Description of Zernike Polynomials (Teaching Notes)*, The University of Arizona, Tucson USA, 2011.
- [14] *Zernike expansion schemes*.  
[http://www.telescope-optics.net/zernike\\_expansion\\_schemes.htm](http://www.telescope-optics.net/zernike_expansion_schemes.htm)  
Abgerufen am: 21.07.2016.